

TOLESTUREN

matematika eta artea

OIHANE LAKAR IRAIZOZ
Elhuyar Zientzia

Edozein irudi lor daiteke papera tolestuz. Irudi miragarriak egiten dira gaur egun, ezin errealistagoak, papera inola moztu edo kolaz itsatsi gabe; tolestuz bakarrik. Papera nola eta nondik tolestu da gakoa, eta, horren atzean, matematikak zeresan handia du. Izan ere, geometria, trigonometria, algoritmoak... matematikaren atal asko daude tolesturen atzean. Matematikari lotutako artea da papiroflexia. Arte-mota horretan saiatzeko gogoz bazaude, paperezko ur-bonba freskagarri bat egiteko jarraibideak dituzu erdiko orrialdeetan. Artikulu hau ez baita irakurtzeko soilik.

Irudimena, ezagutza matematikoa eta eskarmentua. Hiru dohain horiek behar dira papiroflexia bidez irudiak diseinatzeko, Jose Ignacio Royo Prieto EHUKo Matematika Aplikatua saileko matematikariaren arabera. Hortik aurrera, “edozein irudiren oinarria lor daiteke paper-zati batekin; Robert Lang fisikari eta papiroflexian adituak frogatu zuen hori. Irudia egiteko erabiltako den paper-zatian irudiaren zatiak behar bezala banatzea da gakoa”, dio.

Japonian du jatorria papiroflexiak, edo, hitz japoniarra erabilita, *origamiak*; VI. mendekoak dira lehenengo erreferentziak. Japonieraz, bi karakterez idazten da hitza: batek eskua adierazten du (*ori*), eta, besteak, tolestu (*kami*). “Europako papera tolesteko tradizioa japoniarrarekiko independentea da, eta litekeena da oturuntzetako ahozapien tolestura apaingariak izatea abiapuntua. Badaude ohi-tura horri erreferentzia egiten dioten dokumentuak, XVI. mendekoak”, azaltzen du Royok *Matemáticas y Papiroflexia: una relación bidireccional* artikuluan.

Tradiziozko papiroflexia horren motorra intuizioa izan zen, XX. mendearen erdialderaino, gutxi gorabehera: probatuz eta akatsetatik ikasiz sortzen ziren diseinuak, baita aurrez egindako diseinuak eraldatuz ere. Eraldatzeko modu bat izan daiteke, adibidez, “txertaketak egitea —zehaztu Royok, eta hegazti baten burua eta hegoak azaltzen dituen irudi bat erabili du hori azaltzeko—: egindako irudia destoles-

ARG.: PHILIPPE PUT/CC-BY



ARG.: JORGE JARAMILLO/CC-BY

ten badugu, paper-zati hori moztu dezakegu, kontuan hartuta non gelditu den irudiaren osagai bakoitza, eta horiek errespetatuz, alegia, atal bakoitzari dagokion paper-zatia osorik utziz. Bada, banatutako zatiak paper-pusketa handi-ago batean itsatsiz, papera soberan izango dugu irudiari beste atal batzuk gehitzeko, hankak, kasu. Jatorrizko pausoei jarraituz, berriz lortuko genuke hasierako irudia, eta, soberan dagoen zatiarekin hankak egiteko modua bilatu beharko genuke”.

Era horretan egindako irudietan, tolestaileak ausaz edo intuizioz egiten ditu tolesturak, eskuartean duen paper-zatiak animalia edo objektu ezagun baten itxura hartzen duen arte. Orduan, bere eskarmentuak lagunduta, azken ukituak ematen dizkio, eta, ondoren, egindako tolestura-segida gogoratu besterik ez du egin behar, sortutako irudiaren jarraibide-zerrenda egiteko. “Gaur egun ere erabiltzen da papera tolesteko modu hori, baina muga handiak ditu, zalantzarik gabe”, adierazi du Royok.


ASMOA GEHITZEAREN IRAULTZA

Azkeneko hamarkadetan, diseinuak egiteko beste modu bat sortu da; asmo edo intentzio bati jarraituz sortzen dituzte diseinuak. “Bestearekin alderatuta, desberdintasun handiena da tolesten hasi baino lehen, tolestaileak planifikatu egiten duela zer egitura eta banaketa izango dituen ereduak. Eta matematikaz baliatzen da horretarako”, dio Royok. Banaketa planifika-

tu horri esker, “tradiziozkoak baino askoz konplexutasun- eta zehaztasun-maila handiagoko irudiak egiten dituzte”, gaineratu du Royok: era guztietako ugaztunak, beren adar, belarri, buztan eta guzti; hanka, hego eta antena guztiak dituzten intsektuak... “benetako sormen-iraultza gertatu da papiroflexian azkeneko hiru hamarkadetan”, nabarmendu du.

Benetako animalia edo objektuak imitatzen dituzten irudiak eraikitzen dituen papiroflexia figuratiboaz gainera beste era bateko papiroflexia ere badago: papiroflexia modularra. Oinarritzko pieza-multzo bat sortzean datza papiroflexia modularra, eta haiek elkarren artean lotzea, inolako kolarik erabili gabe, bukaeran irudi bat lortzeko (ia beti geometrikoa). “Horretarako, poltsikoak eta hegalak izan behar dituzte oinarritzko piezek, batzuk besteen barruan sartu ahal izateko”, argitu du Royok.

Hainbat dira papiroflexia modernoan erreferente bihurtu diren adituak. Denen gainera, ordea, Akira Yoshizawa japoniarra nabarmentzen du Royok. Hura da, bere ustez papiroflexia modernoaren aita. Hain zuzen, Yoshizawak proposatu zuen, lehenengoz, nola eman ereduak tolesteko jarraibideak, eta horretarako erabili beharreko sinbologia. “Zalantzarik gabe, papiroflexiari egindako ekarpen handiena da papera asmatu zenetik, horri esker nazioartean zabaldu ahal izan baitira edonork egindako diseinuak”, baieztatu du Royok.

 Azkeneko hamarkadetan, diseinuak egiteko beste modu bat sortu da; asmo edo intentzio bati jarraituz sortzen dituzte diseinuak.



Jose Ignacio Royo Prieto

EHUko Matematika Aplikatua saileko ikertzailea eta papiroflexian zaletua.

ARG.: OIHANE LAKAR/ELHUYAR ZIENTZIA.

Papiroflexian zaletuaenez gero, Royok berak zenbait diseinu asmatu ditu, bai figuratiboak, bai modularrak: “Bakoitzak bere berezitasunak ditu, eta, hortaz, jarraibide desberdinen bidez diseinatzen dira”. Adibide bana jarrita azaldu ditu oinarriko gakoak.

PAPIROFLEXIA MODULARREAN, ANGELUAK AZTERGAI

Papiroflexia modularrean, “nire obra garrantzitsuenetako bat da FIT akronimoaz ezagutzen den konposizioa (Five Intersecting Tetrahedra, edo bost tetraedro gurutzatu)”, dio. Zehazki, konposizio horren bertsio solidoa. Izan ere, hainbat itxuratako irudi geometrikoak egin daitezke: solidoak, hau da, pieza solido bat zizelkatuz lortuko litzatekeena; poliedroaren ertzak bakarrik dituztenak, eta, hortaz, aurpegiak hutsik dituztenak; izartuak, aurpegi lauak izan ordez erliebedunak dituzten irudiak, eta abar.

Irudiaren izenak adierazten duen bezala, elkar gurutzatzen duten bost tetraedro osatzen dute irudia. Hori argiago ikusteko, bost koloretako piezak, edo moduluak, eraiki zituen Royok. Horieta-ko hogeitatu modulu elkartuz sortzen da FITa. Hortaz, “lehenengo lana sortu nahi nituen moduluen angeluak aztertzea izan zen, eta, ondoren, papera tolestuz horiek nola lortu asmatzea”.

Moduluak diseinatzea izan zen erronka handiena. Modulu bakoitzak hiru triangeluz eratuta dago, eta, horiek konbinatzean, piramide-itxura hartzen du.

FITaren bost tetraedroak dodekaedro batean bizi direla ikus daiteke irudian. Konposizioko erpinak bosnaka kointziditzen dute plano berean. Bada, bost horiek elkartuz, pentagono bat lortuko genuke, eta bosteko talde guztiek batera dodekaedro bat deskribatzen dute.

ARG.: JOSE IGNACIO ROYO.



DISEINU FIGURATIBOAN, MATEMATIKA ETA ESKARMENTUA ESKUTIK

Irudi figuratiboen diseinuaren kasuan, paperzati bakarrarekin egitenenez lan, garrantzitsuen da “papera ondo banatzea, gure irudiak izango dituen atal guztiak egin ahal izateko”, dio Royok. Horretarako modu bat da lortu nahi den irudiaren eskema egitea. Demagun euli bat, hori diseinatu baitu Royok, besteak beste: “Lehenik, zuhaitz-itxurako eskema bat egin behar dugu, gure irudiak izango dituen atal guztiak izango dituen; atal bakoitza zuhaitz horren adar bat izango da. Adar bakoitzaren luzera ere behar bezala irudikatu beharko dugu, hankak burua baino luzeagoak izan daitezzen, esate baterako. Pauso horretan, diseinatzaileak erabaki behar du zer mailaraino sinplifikatu nahi duen irudia objektu errealetik, edo, kontra-koa, zenbateraino hurbildu nahi duen errealtetera”.



Garrantzitsuen da papera ondo banatzea, gure irudiak izango dituen atal guztiak egin ahal izateko.

Behin zuhaitza izanda, banaketa hori paperera ekartzeko lana hasten da, lanik zailena, eta hori matematika oso lagungarria da. Eulia egiteko sei hanka, bi hego, abdomena eta burua irudikatzea erabaki badugu, hamar adarreko zuhaitza egin beharko dugu; hau da, hamar punta atera beharko ditugu gure paper-zatitik. Demagun paperaren izkinetako batekin egingo dugula horietako bat. Erdetik tolestu beharko dugu izkina hori, eta berriro erditik, eta berriro, punta argal bat lortzeko. Izango duen luzera ere zehazten badugu, eta, ondoren, egindako tolestura guztiak desegiten baditugu, paper laukiaren ertz batean poligono bat markatuta dagoela ikusiko dugu. Punta gehiago argaldu nahi izan bagenu, berriro tolestuko genukeen, eta, destolestean lortuko genukeen poligonoa alde gehiago izango zituzkeen irudikatuta. Hori limitera eramanda, azkenean zirkulu baten laurdena izango genuke. “Bada, zirkulu horrek markatzen duen azalera erreserbatu egin beharko dugu, eta ezingo dugu erabili gelditzen zaizkigun atalak eratzeko”, argitu du Royok.

Laukiaren izkina batean ordez, alde baten erdian egiten baditugu tolesturak, zirkulu erdi bat agertuko zaigu, eta, paperaren barruan eginez gero, zirkulu osoa. Bada, horixe egin behar da,



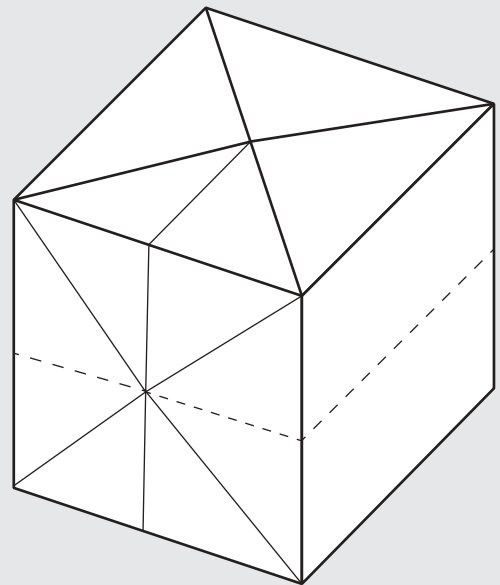
ARG.: DANEL SOLABARRIETA/ELHUYAR ZIENTZIA

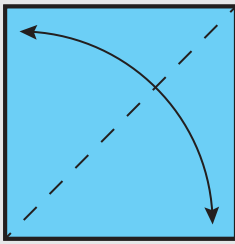
Egin zure ur-bonba

Jarraibide hauek paper-zati batean errepikatzen badituzu, ur-bonba bat lortuko duzu. Garai batean, puxikarik ezean, haurrek urarekin jolasteko egiten zituzten paperezko kuboak dira. Tradizio handiko irudi bat da, aspaldikoa. Esate baterako, John Webster-ek, 1614. urteko “Malfiko dukesa” antzezlanean aipatzen ditu “haurrek euliak harra-patzeko erabiltzen dituzten paperezko kaiolak”, eta adituek uste dute ur-bonbei buruz ari dela.

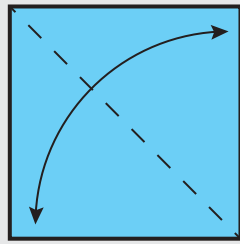
Irudi horren berezitasunetako bat da erabat simetrikoa dela, hau da, mugimenduak lau aldiz errepikatu behar direla bukaerako irudira iristeko. Eta, azkeneko pausoa, putz egin behar zaio sortutako egiturari, ur-bonba bat izateko hiru dimentsioko irudia behar baita.

Anima zaitetz egitera, eta sortu zure ur-bonba, erdiko lau orri hauek aterata. Ezkerrean dituzu jarraibideak, eta, eskuinean, marka-mapa. Beste edozein paper-zati karratu hartuz ere egin dezakezu.

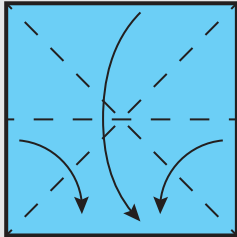




1)



2)



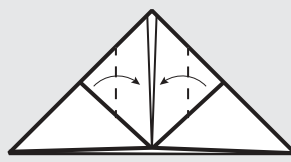
3) Tolestu goitik behera ondoko irudiaren forma emanez



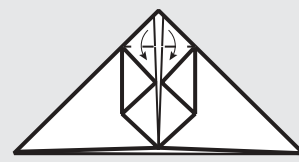
Jarraibideekin moldatzen ez bazara, bideoan ikusi nola egin ur-bonba.



4)



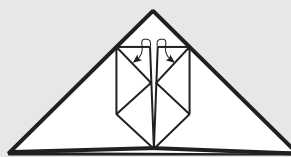
5)



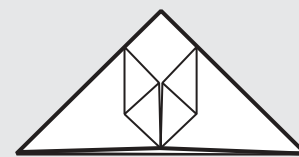
6)



7)



8) 5. pausoko tolesturan sortutako poltsikoetan sartu hegaltxoak



9)

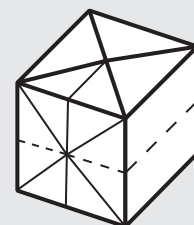
10) Bira eman paperari, eta errepikatu 4-8 pauso-segida

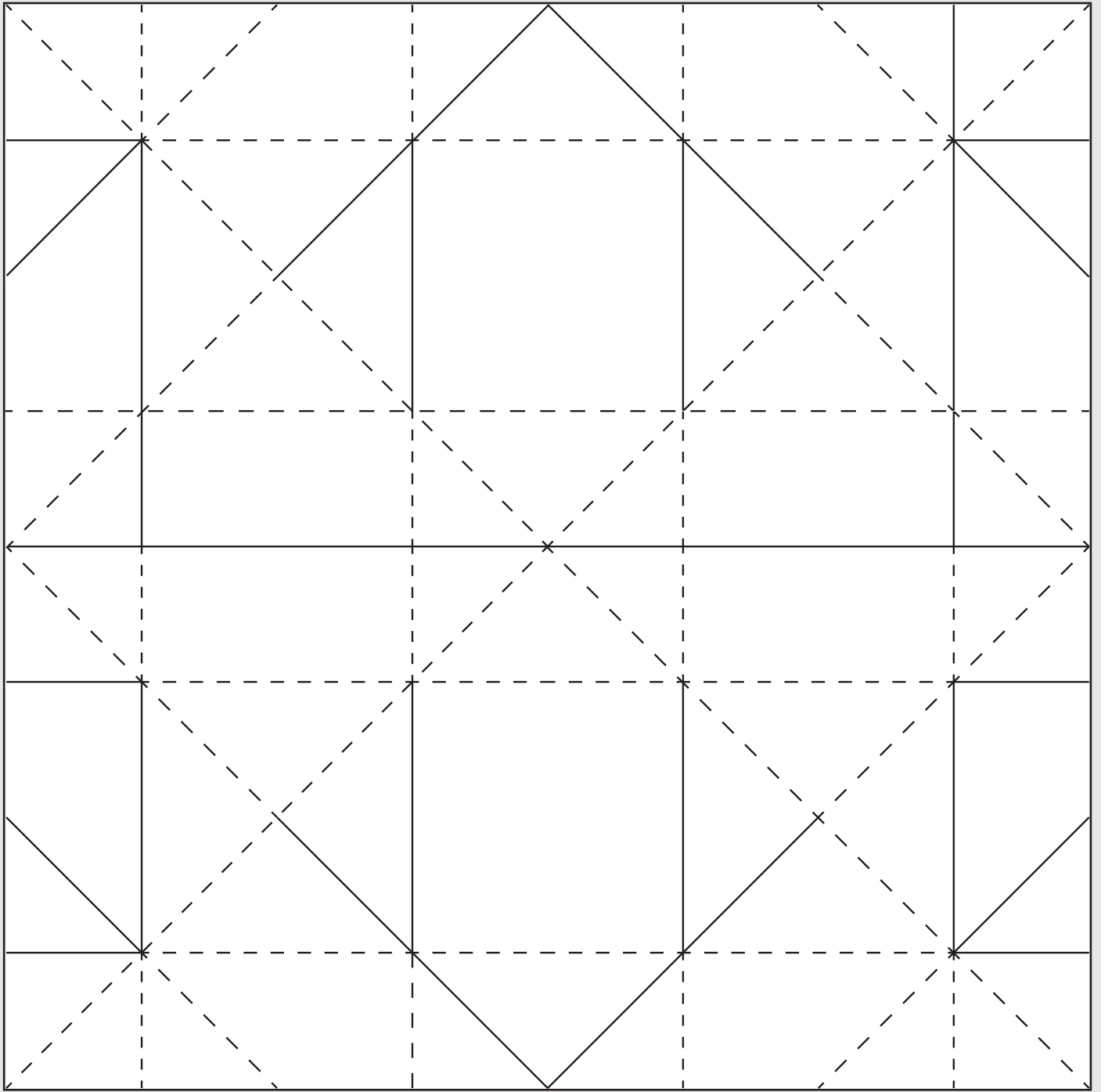


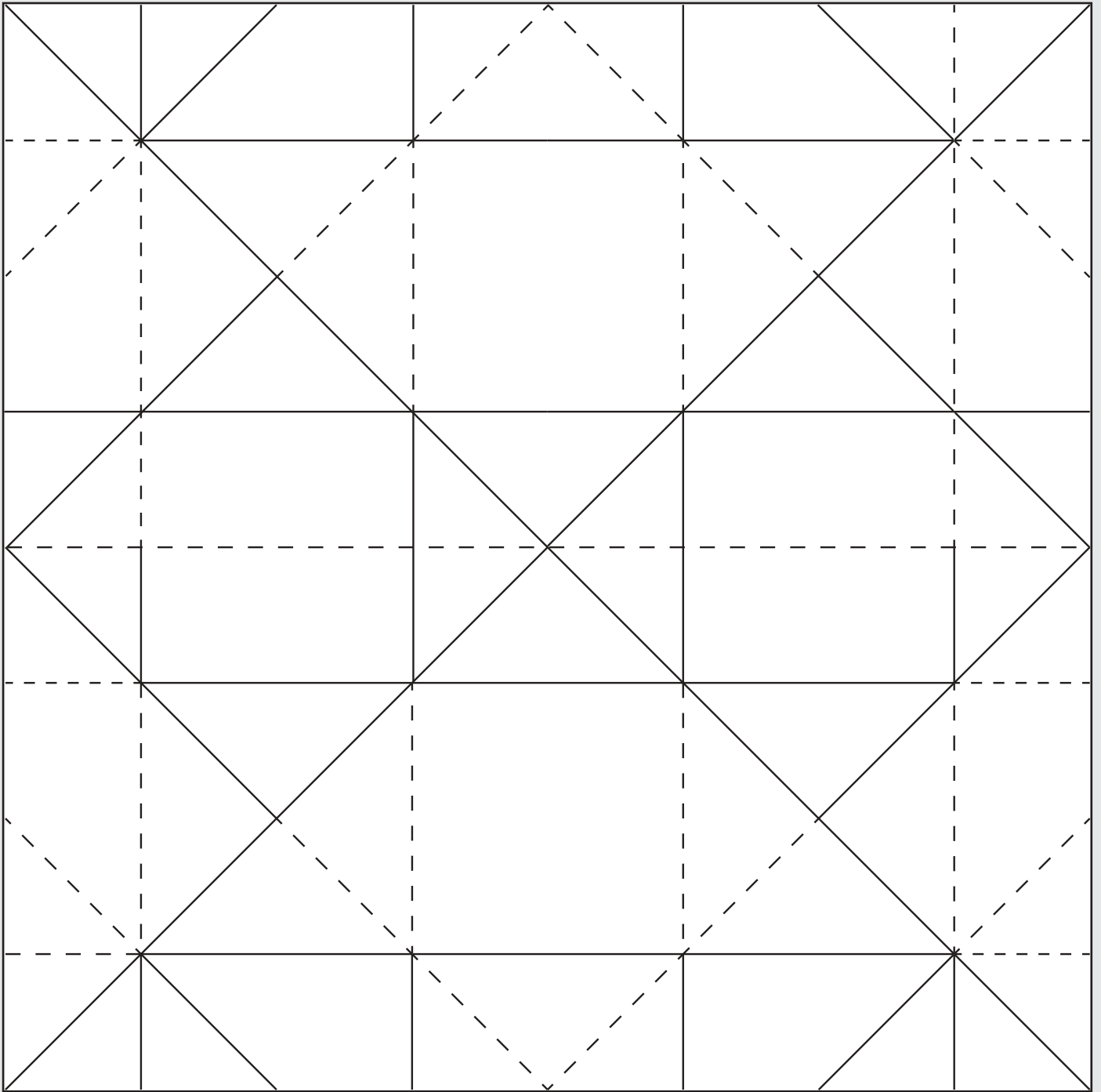
11)



12) Putz egin azpialdean dagoen zulotik kuboia betetzeko







hain zuzen, paper-zatia zirkulutan banatu, eulia egiteko behar ditugun hamar zatiak lortzeko. “Papera banatzeko era optimoa da zirkuluak elkarrekiko tangenteak izatea, ukitzailak”, azaldu du Royok. Hala, lortzen dugu zirkuluak ez gainjartzea batzuk besteekin, eta, aldi berean, paperik ez gelditzea erabili gabe.

Banaketa egindakoan, irudiaren atal bakoitza tolesteko ordua da. “Matematikak dagoeneko garrantzia galtzen du urrats horretan, eta tolestailaren abilezia eta eskarmentua izango dira garrantzitsuenak, punta batzuk gehiago edo gutxiago argaltzeko, moldatzeko, detaileak egiteko, eta, azken batean, bukaerako irudia lortzeko”, dio Royok.

Bere eskarmentuaz baliatu zen, hain zuzen, Royo, aipatutako eulia diseinatzeko. Aurrez, beste diseinatzaile batek egindako irudi baten banaketaz baliatu zen bere diseinua egiteko. Egin beharrekoen artean du deskribatutako prozesuari jarraituz gitea euliaren diseinua.

Edonola eginda ere, sortutako irudia desegingo bagenu, eta jatorrizko laukira itzuli, paperean gelditu diren markak, batzuek haranak eta besteek tontorrak eratzen dituztenak izango genituzke. “Horrek erakusten du, beste ezerk baino argiago, papiroflexiak atzean duen matematika. Izan ere, hizkuntza matematikoan marka-mul-tzo horri grafo esaten zaio, erpinez edo nodoz (puntu) eta ertz ez eratuta baitago, eta horiek guztiak nolabait konbinatuta daudelako”, azaldu du Royok.



Jose Ignacio Royok diseinatutako eulia: *Arenojo cacsomanu*. ARG.: JOSE IGNACIO ROYO.

Marka-mapa horrek izen berezia du papiroflexian, *crease pattern*. “Hori bakarrik izanda, hau da, jarraibiderik gabe, asmatu daiteke zer tolestura egin behar zaizkion paperari bukaerako irudira iristeko, baina papiroflexian eskarmentu dezente dutenek bakarrik egin dezakete —gaineratu du Royok—. Edozeinentzat ez da begi bistakoa zer pauso jarraitu behar diren horretara iristeko”.



Matematikaren oinarrizko kontzeptu batzuk ikusgai papera tolestuz

Papiroflexia matematikaren mundura modu atseginean hurbiltzeko modu bat dela uste du Jose Ignacio Royo Prieto EHuko Matematika Aplikatua saileko matematikariak. “Poliedro bat eskuetan hartzea bezalakorik ez dago haren simetriez jabetzeko, esate baterako. Eta, zer esanik ez, norberak egindako irudia bada”, dio.

Papiroflexiaz irudiak egitera iritsi gabe, paper-zatiak tolestek bakarrik ere aukera ematen du errazago ulertzeko geometriako oinarriko kontzeptu batzuk. Adibidez, paper-zatiaren puntu bat beste baten gainera eraman eta papera tolestean dugunean, bi puntu horien arteko erdibitzailea egiten ari gara. Edo bi ertz bata bestearen gainera jarrita tolestean badugu papera, bi ertzok elkartzen dituen angelua erditik zatitzen ari gara, alegia, erdikaria mar-katzen. “Erregela eta konpasa erabilita ere

egin daitezke horiek guztiak, baina papera tolestuz errazago egiten dira batzuk, eta hobeto ulertzen da zer egiten ari garen, emaitza begien aurrean baitugu”, argitu du Royok.

Demagun paperezko triangelu bat dugula. Ondoren, triangelu horretatik abiatuta laukizuzen bat egin dezakegu, hiru erpinak triangeluaren oinean elkartuz. Bada, hori eginez, ikus dezakegu sortzen den laukizuzenaren azalera jatorrizko triangeluaren azalaren erdia dela, triangelua egiteko erabilitako paperaren bi geruza elkartu direlako laukizuzenean. Gainera, laukizuzenaren oina eta altuera jatorrizko triangeluaren erdia dira, eta hortik ondoriozta daiteke triangelu baten azalera dela haren oinaren erdia bider altuera. Bide batez, gainera, mugimendu horretan ikus daiteke triangelu baten hiru angeluak batuta, elkartuta, angelu lau bat eratzen dela.

Argi daiteke horiek guztiak, baina papera tolestuz errazago egiten dira batzuk, eta hobeto ulertzen da zer egiten ari garen, emaitza begien aurrean baitugu”, argitu du Royok.



ARG.: OIHANE LAKAR/ELHUYAR ZIENTZIA