



# Hormigoia eta kristala FORMULA BATEN

MATEMATIKA BERRIEK LAGUNDU ZUTEN ARKITEKTURAREN BERRIKUNTZA

Capital Gate eraikina, Abu Dhabin, Arabiar  
Emirerri Batuetan. 2011n bukatu zuten.  
RMJM enpresako arkitektoek diseinatu zuten.  
Goian, 35. solairuan (161 m), dorrea 18°  
dago okertuta mendebalderantz. ARG.: © ADNEC

# GAINEAN

**L**ondresko St. Paul katedrala erortzeko zorian zegoen goiko kupula erraldoia eraikitzen hasi behar zutenean, 1697an. Argi zegoen zimenduak hondoratuko zirela pisu gehiegi jarzen bazitzairen gainean, eta eraikina erori egingo zela. Beraz, ezinezkoa zen jatorrizko diseinuari eustea; kupula eta haren gaineko linterna arindu beharko zituen Christopher Wren arkitektoak. Baina nola?

Soluzioa erabat berritzailea izan zen arkitekturen esparruan. Miraria Robert Hooke matematikariaren aurkikuntza batetik etorri zen: bi puntutatik zintzilikatutako kate baten formak, katenariak, modu ezin eraginkorrago batean banatzen ditu indarrak eta tentsioak, eta, forma hori iraulita, tentsioen banaketari eusten die. Beraz, geometria horrekin eraikitako arku bat bereziki egonkorra da. Hookek latinez adierazi zuen ideia hori: *Ut pendet continuum flexible, sic stabit contiguum rigidum inversum*. Alegia, kable malgu batek muturretatik zintzilikatuta hartzen duen forma bera baina iraulita duen arku zurrun bat egonkorra da.

Arkuetan ez ezik, kupuletan ere funtzionatzen du ideia horrek, arkuaren geometria biraraziz sortua baldin bada. Horretaz konturatuta, Christopher Wrenek diseinu berritzaile bat asmatu zuen, hiru kupulako egitura berri bat: bi kupula, barrukoa eta kanpokoa, katenaria baten formatik sortuak, eta tarteko hirugarren bat, linternaren pisuari eusteko. Wrenek kate bat zintzilikatuta eta erdian pisu bat jarrita sortzen den formatik abiatuta diseinatu zuen tarteko kupula. Behartutako forma hori iraulita, egitura egonkorra da pisua zegoen tokian linterna bal-



**Raul Ibáñez**

EHUko matematikaria da. Geometrialaria da, eta dibulgazioan aritzen da. Besteak beste, Divulgamat dibulgazio-webgunearen koordinatzailea da, matematikak dibulgatzeko zentro birtualarena.

ARG.: GUILLERMO ROA/ELHUYAR FUNDAZIOA.



**Rogelio Diez**

Ingeniaria. Guggenheim Bilbao museoaren proiektuan parte hartu zuen IDON enpresan. Haiek egokitzen zituzten Gehryren ideiak Bilboko testuingurura.

ARG.: © ROGELIO DIEZ.

din badago. Wrenen trikimailu matematiko horrek oso modu eraginkorrean bideratzen ditu indarrak beherantz eta, horren ondorioz, nahiz eta hiru kupula izan, sistema osoa behar bezain arina da. Hiru mende geroago, Londresko St. Paul katedralak zutik dirau.

### FORMEN SEDUKZIOA

“Etxeak normalean karratuak egiten dira; baina oso habe sendoak sartu behar dizkiozu, bestela erori egiten zaizulako” dio EHUko Raul Ibáñez matematikari eta dibulgatzaileak. Ibáñezek azaltzen du itxura karratuak (kuboak) oso onak direla egiturak pilatzeko, baina ez direla egonkorak, eta itxura triangeluarrak (tetraedroa), aldiz, bai. “Triangelua zurruna da, eta, hain zuzen ere, eraikuntza askori eusten dion oinarritzko forma da; triangeluz egindako egiturak dira BECen eraikina, aireportu edo kiroldegi asko, Bucky Fuller-en kupula geodesikoak eta beste. Egonkortasuna ematen diote triangeluek eraikuntzari. Eraikuntzan erabiltzen diren ohiko garabiak ez dira eraikinak, baina badira egonkortasunaren adibide bat; triangeluei esker dira sendoak”.

Dena dela, matematikaren ekarpena eraikinen egonkortasunean askoz konplexuagoa da. Hainbat geometriak badute eraikinari eusteko adinako egonkortasuna. Hain zuzen ere, arkitekto ospetsu askok ideia horretan oinarritu

dute haien lana. “Antoni Gaudí eta Eduardo Torroja maisuen filosofia da forma bera badela ederra, ez bakarrik estetikarengatik, baizik eta formak egonkortasuna ematen diolako eraikinari”, dio Ibáñezek.

➔ *Karratuak eta kuboak oso onak dira egiturak pilatzeko, baina ez dira egonkorak. Triangeluak eta tetraedroak, aldiz, bai.*

Gaudíren lana oso ezaguna da. Eraikin handi asko egin zituen, kasu askotan tokian tokiko ikur bihurtu direnak. Haien diseinuek ate berriak ireki zituzten arkitekturan, eta berrikuntza kontzeptu estetikoan ez ezik, matematikan ere oinarritu zuen. “Gaudí muturrera eraman zuen katenariaren erabilera”, azaltzen du Ibáñezek. “Aipatzekoak dira Bartzelonako Terasarren ikastetxea, Batlló etxea eta, batez ere, Milá etxea (normalean La Pedrera izenez ezagutzen dena). Goiko terraza katenariaz osatutako ibilbide bat da, etxe osoaren itzulinguruan”.

Egonkortasuna ekartzen duten forma geometrikoak bilatzea lan handia zen. Gaudí denbora



Londresko St. Paul katedralaren kupula erabat berritzailea da arkitekturan. Hiru kupulako diseinua egin zuen Christopher Wrenek, katenariaren formatik abiatuta. Forma horren azterketa puntako matematika zen XVII. mendearen bukaeran. ARG.: © JAN SKWARA/123RF.



Güell koloniako eliza diseinatzeko Gaudík landu zuen maketa. Alderantziz zintzilikatu zuen, eta hamar urtez probatu zituen katenariak, egitura osatzeko. ARG.: CANAAN/CC\_BY-SA.

asko ematen zuen behar zen geometriaren bila. Hamar urte eman zituen, adibidez, Güell koloniako elizaren diseinuan. Maketa baten gainean egiten zuen lana, berrehun urte lehenago Christopher Wrenek egin zuen antzerako moduan; alegia, buruz behera zintzilikatutako maketa batean lokarriak eta pisuak gehituta. “Güell koloniako elizaren maketa sei metro luze eta lau garai zen”, dio Ibáñezek. “Eskala 1:10 zen tainan eta 1:10.000 pisuan. Bukatu zuenean, argazki bat atera zion, irauli egin zuen irudia, eta eliza izan behar zuena marraztu zuen.

➔ *“Gaudí oso berezia zen; parabloideak, hiperboloideak eta mota guztietako elementu geometrikoak erabiltzen zituen”*

Raul Ibáñez

Gaudí oso berezia zen. Baina, noski, gero forma haiek fabrikatu egin behar zituen. Nahi zituen formak sortzeko, parabloideak, hiperboloideak eta mota guztietako elementu geometrikoak erabiltzen zituen. Zoritxarrez eliza hura ez zuen eraikitzen bukatu”. Baina bai erakin horiek, bai Familia Santuaren eliza, Gaudíren fantasia matematikoak dira; hobeto esanda, fantasia geometrikoak. “Harentzat, gainera, matematika eta



Familia Santuaren argizulo bat barrualdetik ikusita. Horrelako egituretan, Gaudík parabloideak, hiperboloideak eta beste forma geometriko asko erabiltzen zituen, forma ikusgarriak eraikitzeko.

ARG.: © KONSTANTIN YOLSHIN/123RF.



Beijingo Nazio Estadioa, Habia ezizenekoa; itxuraz egitura oso kaotikoa, baina, praktikan, egonkortasunaren matematikaren eredu argia. ARG.: PETER23/CC\_BY.

geometria aparteko gauzak ziren”, dio Ibáñezek irribarretsu, bera geometrialaria zelako.

XX. mendearren hasierako Eduardo Torroja madrildarra ere maisutzat hartzen duite arkitektoek, nahiz eta ez zen arkitektoa. Bide-ingenieria zen. Ez da Gaudí bezain ezaguna, Ibáñezen hitzetan agian “ez zuelako eraikin monumental askorik egin, eta egin zituenak Espainiako Gerra Zibilean bota zituztelako lurrera”. Baina



*Beijingo Nazio Estadioaren egitura “askatu” egin zuten. Eraikitzaileek, amasari eutsi, eta euskarriak kentzen zituen botoia sakatu zuten.*

sen handia zuen, eta aparta izan zen baliabide matematikoak ustiatzen egonkortasuna lortzeko bidean. Adibide polita da Zarzuelako hipodromoaren estalkia, Madrilén. Hiperboloide azalbakarretan oinarrituta dago: gaur egungo arkitekturaren fantasiatzko eraikinak egiteko ohikoa den baliabide geometriko bat.

### ARNASARI EUTSI EGITURA ASKATZEAN

Egia da eraikinen geometria ez dela kontuan hartu beharreko faktore bakarra. Geometria horiek egitura fisikoak dira. 2008ko joko olimpikoe-tako estadioa, Beijingo Nazio Estadioa, adibide adierazgarria da. Habia deitzen diote. Ezizen egokia da, txori batek egindako habi baten itxurakoa delako: tirante-multzo handi batek osatzen du egitura; itxuraz kaotikoa da, baina oso matematika konplexua du diseinuan. Eraikitzean, tiranteak banan-banan instalatu zituzten, eta gero elkarri lotu egitura bakarra sortzeko. Eraikitze-prozesuan zehar, euskarri asko erabili zituzten tiranteak behar zen tokian mantentzeko. Eta denak elkarri lotuta zeudenean, euskarriak kendu egin zituzten. Oso poliki, baina estadio osoan aldi berean. Azken batean, eraikinaren egitura egonkorra “askatu” egin behar zuten, eta bere kabuz zutik iraun behar zuen, geometria jakin eta zehatz batekin. Une berezia izan zen. Eraikitzaileek, amasari eutsi, eta euskarriak kentzen zituen botoia sakatu zuten.

Zer gerta zitekeen? Eraikina lurrera erortzea? Rogelio Diez ingeniariaren ustez, ez. Diez 1992tik Guggenheim Bilbao museoaren proiektuan dago sartuta. Eraikina egin zutenean, IDON enpresan egiten zuen lan; haiek egoki-

tzen zuten Frank Gehry arkitektoaren bulegotik zetorkien kontzeptua Bilboko errealtatera, museoa eraiki ahal izateko. Horregatik, Diezek oso gertutik ikusi zuten museoaren eraikitze-lana. “[Halako eraikin berezietan] arriskuak zein diren? Bada, ez dakit... baina agian akats bat egon daiteke, pieza baten tamainan, adibidez”. Baina, gaur egun, alde aurretik dena oso ondo kalkulatu dago. “Badakizu aldamioa kendutakoan zer indar jasango duen elementu bakoitzak. Eta badakizu elementu horiek erraz eutsiko diotela eraikinari. Errealitatea simulatzen duten programa informatikoak oso zehatzak dira gaur egun; milimetroko zehaztasuna dute”.

Beijingo estadioa ez zen erori. Materialak erabat zurrinak ez direnez, egitura osoak malgutasun-puntu bat zuen. Ondorioz, euskarriak kentzean, estadioak bukaerako forma hartu behar zuen. Asentatu behar zuen, eta hala egin zuen. Adituek sentsore asko zituzten finkatze eta lasaitze hori neurtzeko. Toki batzuetan 20 zentimetro inguruko aldea zegoen aldamioaren posiziotik bukaerako jarreraraino. Kalkulatu bezala.



*“Guggenheim Bilbao museoaren egitura ez zen egonkorra bukatuta egon arte. Buruhauste bat izan zen hori”*

Rogelio Diez

Eraikinaren askatze-une hori, neurri batean edo bestean, eraikin moderno askorekin izaten da. Guggenheim Bilbao museoaren antzeko egiturekin, gainera, arrazoi gehigarri bat dago urduritasun-unea izateko: eraikinaren elementuak banaka ez dira autonomoak. “Egitura ez da egonkorra erabat bukatuta egon arte”, dio Diezek. “Buruhauste bat izan zen hori. Zuk badakizu bolumen bat egonkorra dela geometria jakin bat duelako eta topologia itxia delako. Baina elementu baten erdia, adibidez, ez da egonkorra. Horregatik, elementu guztiak elkarrekin batera muntatu arte ez dira egonkorrak.”

## BILBOKO IZARRA

Guggenheim Bilbao museo hiru geruzatan eginga dago. Lehendabizi, egitura primario bat du, eraikinaren oinarritzko elementuekin. Bigarren geruza egitura arinago bat da, aluminiozkoa, Gehryk diseinatutako forma emango ziona. Eta hirugarrena kanpoko azala da, hau da, kanpoko itxura ematen dioten titaniozko xaflen

geruza; berez, xafla galvanizatuak daude, material iragazgaitza eta, gainean, titanioa. Geruzako egitura horri esker, eraikinak fantasiazko forma du.

“Guggenheim museoan kanpoaldea Bezier gainazalak dira”, azaltzen du Raul Ibáñez matematikariak. “Bezier gainazalak erabilgarriak dira forma egonkorra sortzen dutelako arkitektoak zehaztutako puntu batzuetatik abiatuta”. Jatorrian, Bezier kurbak eta gainazalak autogintzan erabili ziren. Renault enpresako ingeniari batek,



## Xaboi-anpuluak diseinuan

1972ko Municheko Joko Olinpikoetako ikurra estadioa izan zen. Estalkiak oihalez eginga izateko itxura du, estadioa eta inguruak oihal erraldoi batzuekin estalita egongo balira bezalakoa da. Egitura hori egiteko, Frei Otto arkitektoak xaboi-anpuluak erabili zituen, anpuluaren konbinazioak gainazal minimalak sortzen dituelako, eta oso itxura egonkorra direlako. Azalera minimoko gainazalak dira, eta, xaboiaren kasuan, gainazal-tentsio minimoa duten geometriak.

Xaboi-anpulu bakar bat esfera bat da. “Baina esfera ez da geometria egonkor bat”, dio EHUko Raul Ibáñez matematikariak. “Ez da gainazal minimal bat, baizik


eta puntu kritiko bat, eta, beraz, egonkortasun-arazo oso handiak ditu”. Esfera batean eragindako ia edozein aldaketak asko aldatzen du haren egonkortasuna. Puskatu eta erori egiten da. Anpuluaren konbinazioak eta hainbat egiturari lotuta dauden anpuluak, aldiz, gainazal minimalak ematen dituzte.

Horixe egin zuen Frei Ottok Municheko estadioa diseinatzeko. Ibáñezek dio adibide tipikoa dela: “Ottok egitura ikertu eta eraikitzeko, makilaz eta lokarriak sortzen zuten egitura bat, eta xaboi-anpuluak betetako bainuontzi batean murgiltzen zuten. Gero, atera egiten zuten, eta hura aztertu”.



Frei Otto arkitektoak diseinatu zuen Municheko Estadio Olinpikoa. Horretarako, xaboi-anpuluak betetako bainuontzi batean murgiltzen zituen makilaz eta lokarriak, eta haiei itsasten zitzaizkien anpuluetatik abiatuta definitu zuen egitura. ARG.: ARAD MOJTAHEDI/DOMEINU PUBLIKOA.

Pierre Bezier frantsesak, erabili zituen autoen diseinuan. Matematikoki ez dira oso konplexuak, eta forma egonkor eta aerodinamikoak sortzeko baliabide onak dira. “Matematikoki, paraboloiden hiperboloiden eta hiperboloiden orokortzea da”, dio Ibáñezek. Automobilgintzatik diseinu grafikoko programetara iritsi ziren Bezier kurbak eta gainazalak. CAD programetan erabiltzen ziren, eta gero grafikoen tratamendurako baliabideetan ere izan zuten arrakasta. Photoshop adibide ona da, irudien tratamenduaren esparruan, baina ez da adibide bakarra. Izan ere, Bezierren asmakuntza estandar bat bilakatu da.

 *Guggenheim Bilbao museoa sortzeko, CATIA izeneko programa erabili zuten. Berez, industria aeronautikorako softwarea zen.*

Era berean, ingeniartzan eta arkitekturan ere egunero erabiltzen dira Bezier kurbak. Diseinatzailerak ez dituzte forma guztiak zehaztasun handiarekin sortu behar. Oinarrizko maketa batetik abiatuta, softwareak kalkulatu dituzte forma horiek. Horrela sortu zen Guggenheim Bilbao museoa, CATIA izeneko programa erabilita. Berez, industria aeronautikorako garatutako softwarea zen.

“Frank Gehryk, ideia bat duenean, maketa batzuen gainean lantzen du ideia hori”, dio Rogelio Diez ingeniariak. “Eraikin osoaren maketa bat eta hainbat bolumen jakinen maketak egiten ditu. Funtsean, papera eta kartoia da. Maketa bi-

gunak dira, alegia. Berak ez du ezer zizelkatzen. Eta, maketak bukatutzat ematen dituenean, arkatxak optiko baten bitartez digitalizatzen ditu: espazioan maketaren bolumenaren puntuak markatuta, datu horiek ordenagailura sartzen ditu. Eta ordenagailuak berak kalkulatu dituzte gainazalak. Nik, garai hartan, plano baten gaineko digitalizazioa besterik ez nuen ezagutzen. Gauza bera hiru dimentsiotan egiten Gehryri ikusi nion lehenengoz”.

Emaitza maketa birtuala da, eta alde geometrikoa eginda dago. Baina ordenagailuaren lana hasi besterik ez da egin. Hiru dimentsioko modeloaren simulazio fisikoa egin behar da. Horretarako, beste programa batera sartzen da, eta elementu bakoitzak jasaten duen indarra eta tentsioa kalkulatu.


“Kontuan hartu beharreko indar nagusia grabitate-indarra da”, azaltzen du Diezek. “Haizea ere kontuan hartu beharrekoa da, ez da guztiz baztertu behar, baina indar nagusia grabitatea da. Grabitatearen esfortzu guztiak eraikinaren egituraren osagaien bitartez bideratu behar dira zimenduetara. Beraz, osagaien datuak ordenagailuan sartuta, eta zama guztien banaketa ere adierazita, ordenagailuak esango dizu non gehitu behar duzun zutabe bat. Batzuetan hori ez da egingarria, eta orduan sena eta burua funtsezkoak dira. Aldaketak egin, eta berriz ere ordenagailura”. Eta prozesu hori behar adina aldiz errepikatuta sortzen da eraikina. Guggenheim Bilbao museoa horrela jaio zen ordenagailuan. “Gehryren diseinuaren ezaugarri batzuk ezin ziren egin, eta elementu gehiago gehitu behar izan ziren. Galeria handiak, adibidez, pladurrez estalitako arku gehigarriak ditu.”

Guggenheim Bilbao museorenean eraikinaren diseinua ez dago oinarrizko forma matematiko bakar batean. Konbinazio konplexua da, eta egonkorra da zati guztiak bateratuta daudelako. Bakoitza bere aldetik hartuz gero, ez lirateke zutik egongo. ARG.: © GUGGENHEIM BILBAO.



## FANTASIA ERE ERORTZEN DA

Geometria asko landuta egiten dira eraikinak. Eta horrela lortzen dira, esaterako, itxuraz erori beharko luketen baina erortzen ez diren eraikinak. Dena dela, azken faktore bat hartu behar da kontuan. Diezek argi dauka: “Nire ustez, gauza guztiek dute iraungitze-data bat. Eraikinak ez dira betiko. Ez galdetu ehun edo berrehun urte

 Egurrezko egitura batek ondo irauten du 300 urte. Oraindik ez dago duela 300 urte egindako hormigoi armatuzko eraikinik.

iraungo duten, hori ezin da jakin”. Eraikuntza-materialek zeresan handia dute. “Jakina da egurrez egindako egitura batek ondo irauten duela 300 urte. Eta badakigu hormigoizko egiturek ehun urte baino gehiago irauten dutela, baina

oraindik ez dago duela 300 urte egindako hormigoi armatuzko eraikinik. Ez dakigu iraungo duten ala ez. Guggenheim Bilbao museoaren egitura hormigoi armatuzkoa eta metalezkoa da. Itxuraz, asko iraungo du lurrera erori gabe, baina ez dakigu”. Horregatik egiten zaio ikuskapena Guggenheim Bilbao museoari. Topografiak milimetrotako zehaztasuna ematen die Diezen taldekoei, eraikina zenbat mugitzen ari den jakiteko. “Eraikin guztiak daude etengabeko mugimendu batean”.

Historian atzera begiratuta, badira erori diren eta erori ez diren fantasiatzko eraikinak. Guztietatik ikasi dute arkitektoek eta ingeniariak. Eraikinen iraupenari buruzko aztergaia emateaz gain, beste ate bat irekitzen dute; garai bateko teknologia mugatuaz fantasiatzko eraikinak nola egin zituzten azter dezakete. Duela zortzi mendeko Europako arkitektura, adibidez, erudugarria da. Frantziako iparraldean, fantasiatzko katedralak asmatu zituzten. Harrigarria da nola egin zituzten. ●

