

# ZIFREN HISTORIA (V)

Patxi Angulo

## Sistema berriaren hedapena

Sistema hinduak Europaraino heltzeko mila urte behar izan zituen, arabiarrek bitartekari izan zituelarik.

Arabiarrak hedatu zirenean (VIII-XIII. mendeen bitartean) herri guztietan zeuden lan greziarrak, filosofikoak, zientifikoak edo literaturazkoak bildu eta arabieratu egin zituzten. Leku guztietan liburutegiak eta unibertsitateak eratu ziren. Bagdad, Damasko eta geroago Alkairo, Kairuan, Fez, Granada eta Cordoba hiriak zientziguine bihurtu ziren berehala.

Europar, aldiz, XI. mendera arte krisialdia bizi izan zen; politikan zein zientzian. Esaterako, aritmetika teorikoa irakasteko Geresako Nicomaco (K.o. II. mendea) greziarren lan matematiko kaxkar batek iradokitako eta Boecio (K.o. V. mendea) latindarrarena omen zen lan bat erabiltzen zen. Aritmetika praktikoari dagokionez, zenbakikuntza erromatarra eta abakoa maneiatzen zituzten.

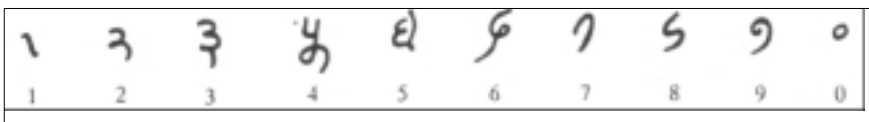
Arabiarrak, hasieran, zenbakikuntza alfabetiko greziarra eta hebraitarra bereganatu eta beren 28 letrako alfabetora moldatu zituzten. Bestalde, babiloniarren posizio-sistema hirurogeitarra eta zeroa berreskuratu ziren. Baina hinduen sistema merkatal erlazioen bitartez ezagutu zutenean, oso-osorik hartu zuten.

Arabiarrak ez ziren horretan geratu, eta kulturari ekarpen ederra egin zioten. Antzinako lanak bildu eta itzultzean zenbait iruzkin egin zuten. Horrez gain matematikari greziarren sistematizazio-zurruntasuna zientzia hinduaren praktikotasunarekin elkartu zuten.

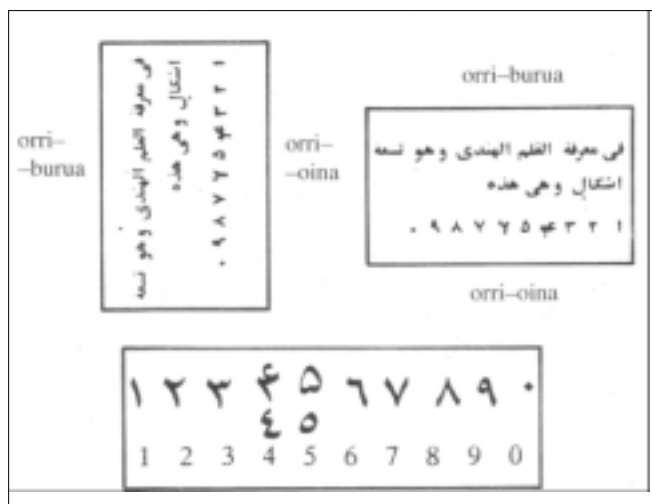
Matematikari arabiar-islamiarren artean Mohamed Ibn Mussa al-Khowarizmi (780-850) samaniarra aipatu behar da. Bere bi liburuengatik da ezaguna. Lehengoan aritmetikaz ari da eta bertan sistema hindua azaltzen du, adibide eta guzti. Geroago mendebaldeko Europar arrakasta osoz zabalduko zen. Izan ere

egilearen izen latindarra Alchoarismi → Algorismi → Algorismus → Algorismo → Algoritmo, sistemaren sinonimo bihurtu zen. Bigarren lanean zientzia algebraikoa tratatu zuen. Hau ere ospetsua izan zen. Lan honen izenburua aljabr hitzaz hasten zen. Ekuazio batean bi ataletan gai positiboak uzteko gaiak atalez aldatzen zituzten eragiketa bietako batek izen hau dauka.

Arabiarrak hinduen sistema bereganatu zutenean, zifrak kopiatzea besterik ez zuten egin. Kopisten eskuetatik pasa eta gero itxuraz aldatu egin ziren.



Itxuraz aldatzeko arrazoi bat idazkeran aurkitzen da; zutabeka idazten bait zuten, ezkerretik eskuinera. Irakurtzeko 90°ko bira, erloju-orratzen norantzan, ematen zioten. Nolanahi ere, probintzia arabiarretatik zabaldu ziren zifrak izan ziren, beraiek zifra “hindi” deitzen zitelarik.



# Matematika bitxiak

Baina gure zifrak ez datoz zuzenean hauetatik; mendebaldeko arabiarren zifretatik baizik. IX. mendean inperio arabiar-musulmana hautsi egin zen, ipar-mendebaldeko Afrika eta Iberiar Penintsulako eskualde musulmana Bagdad-eko kaliferritik at geratu zelarik. Hala ere, erlazioak ez ziren eten; batez ere Mekarainoko erromesaldiengatik, merkatal elkartrukeengatik, gerrengatik eta populazioaren migrazioengatik. Ekialdeko arabiarrek mendebaldeko irakatsi zieten hinduen sistema. Eskualde honetan zifrek bilakaera ezberdina izan zuten.

1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Hauei zifra “ghobar” (hauts-zifrak) deitzen zieten, kalkulu-tauletan zifrak idatzi ahal izateko barreiatzen zuten hautsagatik. Itxurazko aldaketa hau mendebaldeko kopisten tankera grafikoari zor zaio.

Arabiarrek hinduen sistema ezagutu bezain laster bereganatu zuten bitartean, europarrek onar zezaten mendeak igaro behar izan zuten. Garai hartako Europan, Inperio erromatarraren deuseztapenetik Erdi Aroaren amaiera bitartean, kalkulua (abakoaren bidezko kalkulua) pribilegiatuen esku zegoen. Hala ere, mendebaldeko herritarrek sistema hinduaren abantailak lor zitzaizketen Gerbet d’Aurillac mojeari esker; 999. urtean Silbestre II.a izenez Aita Santu izendatu zutenari esker hain zuzen. Gerbert komentuan matematika eta astronomia ikasia zen. Iberiar Penintsulan zegoela arabiarrengandik zenbaki-sistema eta kalkulu-metodoak ikasi zituen. Reims-eko elizbarrutiko eskolako zuzendari izanik bere ikasketak aplikatzen saiatu zen. Baina, tamalez, zifrak (zero salbu) sartzea besterik ez zuen lortu. Zutabezko abakoetan uharriak zifrez ordezkatu ziren, baina abako haietan zeroa ez zen beharrezkoa.

Arabiarrekin gertatu zen bezala, Europan ere zifrak desitxuratu egin ziren arrazoi ezberdinak medio; fantasiaz idazteagatik, buruz behera edo zeharka kopiatzeagatik, etab.engatik.

Arketipoa: X mendea  
Iberiar Penintsula

٠	١	٢	٣	٤	٥
LIMOGES	FLEURY	LORRAINE	AUXERRE	REGENSBURG	CHARTRES
XI. mendea		XII. mendea		XIII. mendea	

XII. mendea	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XIII. mendea	1	7	3	2	4	6	8	9	0	٠
XIV. mendea	1	2	3	4	6	7	8	9	0	٠
XV. mendea 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
inguruan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Gurutzadak pasatakoan jatorrizko grafiak berreskuratu ziren. XIII. eta XIV. mendeetatik aurrera gaurko itxura hartu zuten. Gutenbergen inprentak betirako finkatuko zituen zifren itxurak. Gurutzaden helburua zientzia eta kultura birkonkistatzea ez bazen ere, hori izan zen emaitzetako bat. Lurralde Santura joan ziren gurutzatuak bertako kulturaz jabetuta itzuli ziren. Gurutzatuek bestalde, musulmanekin merkatal eta kultur elkartrukeak izan zituzten. Hauei esker sistema hindua Europara sartu zen.

Mediterranio itsasoaren beste aldean, Iberiar Penintsulan, XI. mendearen amaieraz gero kultur elkartrukeak indartu egin ziren itzultzaileen lanei esker. Orduan lan guztiak latinera itzultzen hasi ziren kristauak.

Giro hartan matematikari italiar bat nabarmendu zen: Pisa-ko Leonardo; “Fibonacci” goitizenezkoa. Afrika musulmanean eta Ekialde Hurbilean ibili zen, bertan arabiarren sistema ikasi zuelarik. Geroztik 1202. urtean Liber Abaci (Abakoaren tratatua) izeneko lana aurkeztu zuen, non zifra-kalkuluaren erregelak azaltzen bait zituen. Hemendik aurrera kalkulu berrien zaleak ugaltu egin ziren. Hala ere, garapena urrun zegoen.

Bi arrazoi nagusi zeuden kalkulu berria onar ez zedin. Alde batetik antzinako kalkuluaren “jabeek” bere bizimodua arriskutan ikusten zuten. Bestalde Eliza zegoen, zeinak zientziaren garapena bere dogmen menpean egoteko eskatu bait zuen. Arabiarren kalkuluaren erraztasuna Satanas-i leporatu zioten.

Zero eta zifra hitzen etimologiak ere lagunduko digu. Zero hitza sanskritoazko sifr (huts, hinduen śūnya) hitzetik dator. Fibonacci-k bere Liber Abaci lanean zephirum izena eman zion, geroago zefiro bihurtu zen eta 1491. urtetik aurrera zero geratu zen. Baina sifr hitzetik zifra hitza ere badator. Bere latinezko transkripzioak Sifra, Cifra, Cyfra, Tzyphra, Cifre, Cyfre, etab. dira. Hasiera batean hitz honek zeroaren esanahia izan zuen. Hori

ulertzeko Elizak ezarritako girora bueltatu behar da. Zifra arabiarrek erabiltzea garai batean debekaturik egon zen. Bestetik jendeak sistema ezkutuan erabiltzen zuen eta “zifra” izenez aipatzen hasi zen, bi esanahiak (zero eta zifra) nahastuz. Adituak jatorrizko esanahia mantentzen saiatu ziren, baina ez zuten lortu.

Zientzilariak berehala agertu ziren sistema berriaren alde. Merkatari, bankari, funtzionari eta oro har atzerakoiei aldiz, asko kostatu zitzaizen abakoa uztea. Egoera hau Erdi Aro eta Errenazimentuan zehar XVII. eta XVIII. mendeetara arte mantendu zen administrazioan.

## Amaitu ote?

Azkenik eta oztopoz beteriko historia luze baten ondoren, gure sistema osatu egin zen. Baina bukatu al da zifren historia? Hala uste dugu bederen. Ordenadoreak agertu direnean zifren grafia aldatu arren, beraien agitura ez da mugitu. Beste oinarriez, 12 edo 2 (ordenadoreena) oinarriez esaterako, pentsa genezake. Hala ere sistema ez litzateke aldatuko. Posizio-printzipioak, zeroak eta kalkulu-erregelek iraungo lukete.

Crô-Magnon gizakiaren garaitik gizaki modernora arte garunean ez da oinarritzko aldaketarik egon; aberastasun kulturala baizik. Leopoldo Kronecker matematikariak esan zuenez: “Jainkoak zenbaki arrunta sortu zuen; gainerakoa gizakien lana”. Edo Lichtenberg filosofo alemaniarren hitzetan: “Gizakia, hasieratik hasi zen: magnitude oro bere buruaren berdina da; eta Eguzkia eta izarrak neurtzeraino heldu zen”.

Beste munduetako izakien bisitaren teoriak huts egin du arlo honetan. Hain azkarrak baziren, hona etorritz gero zergatik ez zizkiguten posizio-zenbakikuntza eta zeroa utzi?

Zifretaz ez dagoela Babel-eko dorrerik esan behar dugu. Mundu osoan lau mila hizkuntza baino gehiago eta alfabetoak dozenaka dauden bitartean, gaur egun zifra hinduen sistema herri guztiek onartu dute.

Sistema honek kalkulagailuen eta informazioaren tratamenduaren sorrera eta garapena bideratu du. Hori beste sistemekin ez zatekeen gertatuko. Hasieran Vinci-ko Leonardo, Pascal, Leibniz, Babbage, ... (mekanika) geroago Hallerith, Torres Quevedo, Arken, ... (elektromekanika) eta azkenik Turing, Atanasoff, Von Neumann, ... (elektronika) zientzilariek egindako lanari zor diegu hori.

Zifrekin batera zenbaki-kontzeptua eta idazkera matematikoa garatu ziren.

Denbora luzez ezin ziren zenbaki negatiboak idatzi; ezta 4 - 7 bezalako kendurak ere. Zero kontzeptuak eman zuen aukera hori.

Beste lorpen bat, ezberdin ziren kontzeptu batzuk zehaztea eta batzea izan da. Esate baterako, zatikiak. Antzinatek ezagutzen dira. Egiptiarrek zatiki jatorrizkoak (zenbakitzailea 1 denean) bakarrik ezagutzen zituzten. Babiloniarrek zatikiei idazkera arrazionala eman zieten, zatiki hirurogeitarrek sortuz. Greziarrek, beren zenbakikuntza alfabetikoaren ezintasuna zela eta, babiloniarren sistema hartu zuten. Idazkera modernoa hinduei zor diegu eta marraren asmakizuna arabiarrei.

Geroago, zatiki hamartarren (zatitzailea hamarren berredura denean) aurkikuntzaren ondorioz, komaren eskuinaldean zifrak idatz zitezkeela ikusi zen. Europan, Simon Stévin belgiarra izan zen lehenengoa, 1582. urtean 713,794 zenbakia idazteko 713 (0) 7 (1) 9 (2) 4 (3) idatzi zuelarik. Hamar urte geroago Jost Bürgi suitzarrak 713<sup>8</sup> 794 idatzi zuen. Urte berean Magini italiarrak zirkunferentziatxo puntu batez ordezkatu zuen 713.794 idatziz. Eta gaurko komari dagokionez, Wilbord Snellius nederlandarrak asmatu zuen XVII. mendearen hasieran: 713,794. Zatikien idazkeraren arrazionalizazioak neurtzeko sistema hamartarren asmakuntza erraztu zuen.

K.a. VI. mendea baino lehen matematikari greziarrek zenbaki irrazionalen existentzia ezagutzen zuten  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{71}$ ,  $\pi$ ,... Pitagorikoak zenbaki hauek ezkututzen saiatu ziren (jainkoak ez haserretzearren), baina geroago agerian azaldu ziren “neurtezin” izenez. Hala ere, zenbaki-sistemen akatsak zirela eta ez ziren ondo definitu. Matematikari europarrak, aurrerapenez baliaturik, zenbaki hamartar bukaezinak (zeintzuetan zifrak errepikatzen ez ziren) zirela konturatu ziren. Horrela, zenbaki razionaletatik bereiztea lortu zuten. Geroztik zenbaki algebraikoen eta zenbaki transzendenten kontzeptua sortu ziren. Gaur ondorengo bereizketa egiten da:

- Zenbaki irrazionala: lehen mailako koefiziente osodun inongo ekuazioen soluzio ez dena:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt[3]{10}$ , ...
- Zenbaki algebraikoa: koefiziente osodun eta ekuazio algebraiko baten soluzio dena:  $2$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ , ...  $x - 2 = 0$ ,  $x^2 - 2 = 0$ ,  $x^3 - 7 = 0$ , ... ekuazioen soluzioak dira.
- Zenbaki transzendentea: koefiziente oso edo zatikiduna eta inongo ekuazioen soluzio ez dena:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\log 2$ ,  $\cos 25^\circ$ , ...

Sistema berrian edozein zenbaki arrunt idatz ba-daiteke ere, idazkera berezia onartu dute zientzilariek:

$1000 \equiv 10^3$ ;  $100.000 \equiv 10^5$ ;  
 $827659000000000000 = 827659 \times 10^{11}$   
edo koma higikorraren idazkera erabiliz  
 $8,27659 \times 10^{16}$ .

Sistema berriarekin galdera bat plazara daiteke: zein da idatz daitekeen zenbakirik handiena? Galdera honen ondorioz infinituaren kontzeptua sortu zen. Gaur infinitua  $\infty$  ikurraz adierazten dugu. John Wallis ingelesak erabili zuen 1655. urtean lehenengo aldiz. Infinituaren kontzeptu fisiko eta matematikoa bereiztu egin behar dira. Fisikoki neurtu den baliorik handiena  $10^{42}$  izan da. Beste gauza batzuen artean unibertsoan dauden protoi eta neutroien kopurua da.

Matematikariak urrunago joan dira eta zenbaki transfinituak asmatu dituzte. Hauetako lehena,  $\aleph_0$  (aleph-zero) da ( $\aleph$  alfabeto hebraitarraren lehenengo letra da). Honek zenbaki arruntan, zenbaki bakoitien, zenbaki bikoitien, zenbaki razionalen eta abarren kopurua adierazten du.

Algebraren aurrerapena ahalbideratu zuten bi aurkikuntzak, zifren sistema berria eta idazkera sinboliko lineala izan ziren. Azken honen asmaketa (1591) François Viète'ri zor diogu. Viète'k algebraren orokorpena ekarri zuen zenbaki ezezagunak x, y, ... letren bidez adierazi zituenean. Honek algebra eta pentsamendua objektu konkretuen menpetik askatu zituen eta arrazonamendu abstraktura hurbiltzen lagundu zuen.

Ikurrei gagozkielarik, Erdi Aroan (-) zeinua minus eta (+) zeinua più hitzez izendatu ziren. Hitzak gero ñ eta þ ikurrez ordezkatu ziren, 1489. urtean Ricardo Widmann alemaniarrak lehenengo aldiz erabili zituen ikur ezagunak (+, -) onartu arte. 1557. urtean Robert Recorde ingelesak = ikurra asmatu zuen; Thomas Harriotek ezberdintasunetako < eta > ikurrak 1631. urtean; William Oughtred-ek x (biderkaketa) XVII. mendearen hasieran eta  $\sqrt{\quad}$  (erro karratua) ikurra (R letratik eratorria) Christoph Rudolfek sortu zuen 1525. urtean.

Hemen bukatzen da zifren historiatxo hau; gizakiaren historia orokorraren zati txiki bat baino ez dena hain zuzen. 