



# ZONBIEN IZURRITE BATI AURRE EGITEKO GAI IZANGO OTE GINATEKE?

ELISABETE ALBERDI CELAYA  
Matematika Aplikatua Saila, Meatzeen  
eta Herri Lanen Ingeniaritza Teknikoko  
Unibertsitate Eskola, EHU

Odola dariela, garunak edota hesteak kanpoan dituztela, gorputz-adarren bat falta dutela, begiak infinitura begira dituztela, pauso geldo eta traketsak emanez... Horrela ageri dira *The Walking Dead* telesailen mundua inbaditu duten zombiak edo bidaztiak —sailean deitzen zaien modura—. Gutxi badira ere, gizaki bakan batzuk oraindik bizirik dira. Baina badirudi dauden apurrik desagerrarazi arte zombiek ez dutela bakerik izango. Gai izango ote da gizakia zombien atzaparretatik ihes egin eta amesten duen mundua berreskuratzeko? Ala alderantziz, zombiak bihurtuko ote dira lurreko jaun eta jabe? Telesailaren zenbatgarren denboraldira arte itxaron beharko dugu galdera horien erantzunak aurkitzeko? Eredu matematikoetan aurki dezakegu erantzuteko argibidea.

## THE WALKING DEAD

Zientzia-fikziozko hainbat istoriotan zombien apokalipsiak kontatzen dira. Halakoetan, gizakia hil ondoren berpiztu egiten da, eta zombi bilakatzen da. Gehienetan, berpiztutako gizaki hauek, zombiak alegia, gizajaleak edo kanibalak dira. Baldarrak dira, begirada erdi galdua dute, eskuak aurrerantz dituztela egiten dute oinez eta trakets mugitzen dira. Harraparik bizkorrenak izan ez arren, zombiak gai dira gizakiengana hurbildu, haginka egin eta hiltzeko. Zombien eskuetan hildako gizakia zombi bihurtzen dira eta horrela haien tribua ugartuz joaten da. Egoera horretan, gizakia sakabanatu egiten dira, gizatalde isolatuak sortzen dira eta mundua zombien beldur den toki bilakatzen da.

Frank Darabont-ek garatutako telesaila da *The Walking Dead*, eta Robert Kirkman eta Tony Moore-ren komikiak ditu oinarri. Ospitale zahar batean koma-egoeratik esnatu ondoren, Rick Grimes poliziak ez du koman egon aurretik utzi zuen mundua aurkitzen, zombien izurrite batek suntsitutakoa baizik. Atlantako aldirietan, izurritetik bizirik ateratzen den giza talde txiki batek bizirik irauteko ahaleginean dihardu, eta Rick izango da talde hori gidatuko duena. Zombirik gabeko lurra bilatzea dute amets. Egoera gero eta ospelago batean, eta etsipena nagusitzen zaien bitartean, bizirik irauteko senak edozer egitera bultzatzen ditu. Zombiak dira sail honetako piztia harrapatzaileak, eta gizakia nahi dute harrapatu.

## HARRAPARI ETA HARRAPAKINEN

### EREDU MATEMATIKO SINPLIFIKATU BAT

Komunitate batean izurriteak edota espezie gutxituen behin betiko desagertzea ekidin nahi badira, populazio-dentsitatearen haz-



ITURRIA: [HTTP://WWW.MOVIEPICTUREDB.COM](http://www.moviepicturedb.com)

kundeari edo jaitsierari erreparatu behar zaio. Populazio-dentsitatearen gorabeherak ulertzeko eta denboraldi batean izango diren aldaketak aurreikusteko ezinbesteko tresnak dira populazioaren zikloak, zeintzuetan espezie bateko populazioa behin eta berriro hazten eta txikitzen den. Hala, harrapari eta harrapakinen ereduak ikerketa hauek parte garrantzitsua izan dira, eta ekologia eredu matematikoen bidez modelatzeko ahalegina adierazten dute. Alfred Lotka eta Vito Volterra izan ziren harraparien eta harrapakinen eredu matematiko sinplifikatu bat proposatu zutenak.

Jo dezagun harrapari batek —adibidez, azeriak— bakarrik untxiak jaten dituela eta  $t$  aldiunean  $a(t)$  azeri-populazioa eta  $u(t)$  untxi-populazioa daudela. Untxirik ezean, aze-

riak ekuazio diferentzial honi jarraikiz hilkorak irateke:  $a'(t) = -\gamma a(t)$ ,  $-\gamma$  konstantea azerien jaiotze-tasaren eta heriotza-tasaren arteko diferentzia-parametroa izanik. Azeririk ezean, untxi-populazioa esponentzialki haziko litzateke  $u'(t) = \alpha u(t)$  ekuazio diferentzialari jarraituz,  $\alpha$  untxien jaiotze-tasaren eta heriotza-tasaren arteko diferentzia-parametroa izanik.

Populazio bien kantitateak positiboak diren egoera modelatu nahi bada, azerien ekuazio diferentzian batugai bat gehitu beharko da, untxiak daudenean positiboak izango dena eta zenbat eta untxi gehiago egon handiagoa izango dena. Gainera, batugai horrek handia izan beharko du untxi-kopurua eta azeri-kopurua handiak direnean. Era berean, untxien ekuazio diferentzian

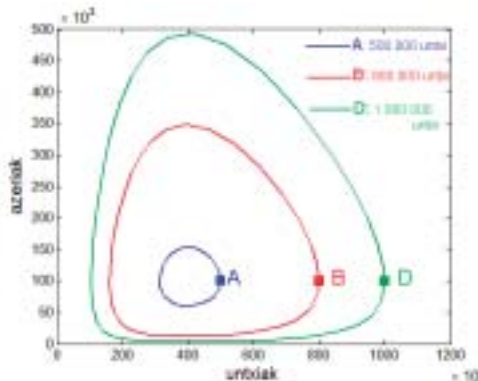
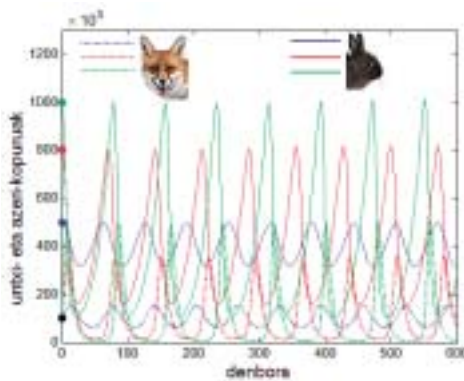
ere beste batugai bat erantsi beharko da. Kasu honetan, erantsiko dugun batugaia negatiboa izango da, azeriak dauden egoera batean: azeriak daudenean, azeriek untxiak jango baitituzte eta, ondorioz, gutxitu egingo baita untxi-kopurua. Gainera, zenbat eta azeri gehiago izan untxi-kopurua orduan eta gehiago gutxituko denez, batugai negatibo horrek azeri-kopuruaren araberakoa izan beharko du. Hori kontuan hartuz eta hasierako untxi- eta azeri-kopuruak  $u(0)$  eta  $a(0)$  direla kontuan hartuz sortzen den harrapari eta harrapakinen ereduari Lotka-Volterra eredu deritzo, eta honela emana dator:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)(\alpha - \beta a(t)) \\ a'(t) = -a(t)(\gamma - \delta u(t)) \end{cases}$$

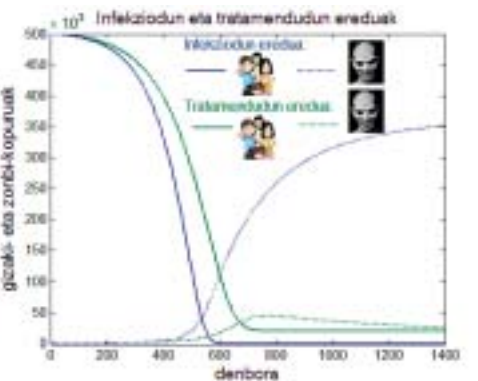
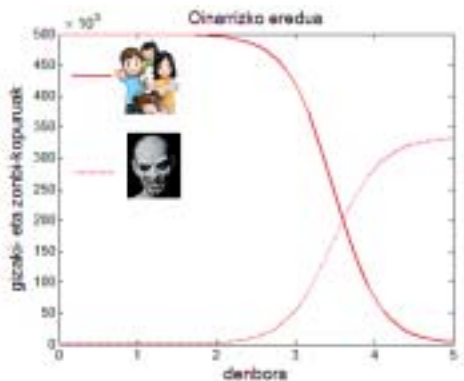
Zentzua duen eredu da, azeri-kopurua handitu ahala untxi-kopurua aldatzen den erritmoa, hau da  $u'(t)$ , txikituz baitoa, eta untxi-kopurua handitzen denean untxiak ugaltzen diren abiadura ere handitu egiten baita. Emaitza ziklikodun ekuazio diferentzialen sistema da hori: untxiak gehitzen badira, azeri-kopurua handitu egingo da janari gehiago izango dutelako; eta azeri-kopurua handitzen denean, gutxitu egingo dira untxiak. Untxien gutxitzeak azerien gutxitzea ekarriko du, eta horrek untxien gehitzea, eta berriaz hasierako puntuan izango gara zirkloa osatuz.

Eredu horretako oreka populazio bata ez bestea aldatzen ez direnean gertatzen da, hau da, deribatu biek zero balio dutenean. Eta hori gertatzen da untxi-kopurua eta azeri-kopurua nulua direnean,  $u(t) = a(t) = 0$ , edota  $a(t) = \alpha/\beta$  eta  $u(t) = \gamma/\delta$  gertatzen direnean. Lehenengo soluzioan, espezie biak desagertzen dira; bigarrenean, populazio bien kopuruek finko dira denboran.

Baina halako zirkloak ohikoak al dira naturan? Gai al da eredu hori populazio-aldaketak era egokian iragartzeko? Erantzuna ezezkoa da, aurkeztu dugun harrapatzaile bakarrek eta harrapatu bakarrek eredu sinplifikatuegia baita. Errealitatean, harrapari eta harrapakin bat baino gehiago dagoen testuingurua gertatzen da, eta oso konplexu bihurtzen da. Nolanahi ere, nahiz eta Lotka-Volterra ereduak mundu errealean gertatzen dena era egokian modelatu ez, harrapari eta harrapakinen eredu konplexuagoi bide eman die eta eredu konplexuago horiek komunitate ekologikoa hobeto ulertzen eta harrapari eta harrapakinen zirkloak erregularizatzen lagundu dute.



Lotka-Volterra ekuazioen emaitza hasierako balio jakin batzuetarako. Irudiaren ezkerrean 100.000 azeri eta 500.000, 800.000 eta 1.000.000 untxi dauden hasierako populazioei dagozkien untxi- eta azeri-kopuruak denboran irudikatu dira. Irudiaren eskuineko aldean, hasierako balio-bikote bakoitzerako untxi- eta azeri-kopuruak irudikatu dira. Hasierako untxi- eta azeri-kopuruak  $\square$  sinboloa erabilia irudikatu dira. ARG.: © ELISABETE ALBERDI.



Gizaki-zonbi eredu bakoitzari dagozkien soluzio-kurbak: ezkerrean, oinarrizko ereduari dagozkien soluzio-kurbak, eta eskuinean, infekziodun ereduari eta tratamendudunari dagozkienak. Hasierako balioak, hauek hartu dira: gizaki-kopurua 500.000, zombi-kopurua 0, infekziodunen kopurua 0 eta hildakoen kopurua 100.000. Kasu guztietan, konstante-sorta berdina erabili da ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$  eta  $c$ ). ARG.: © ELISABETE ALBERDI.

**ZONBI-IZURRITE BATEKO ZENBAIT EREDU MATEMATIKO Oinarrizko eredu**

Populazio-dentsitateak eredu matematikoen bidez modelatzerakoan erabili izan den adibideetako bat zombiena da. Harrapari eta harrapakinen eredu zombiek eta gizakiek osatzen dutenean, hiru multzo kontsidera daitezke: gizakien multzoa (G), zombiena (Z) eta hildako gizakiek eta hildako zombiek osatutakoa (H). Eredu honetan joko dugu gizaki-kopurua jaiotze-indizeagatik handitzen dela ( $\Pi$  deituko duguna) eta bi arrazoiengatik gutxitzen dela: kausa naturalengatik eta zombien eraginagatik. Zombien kopurua gizakien eraginagatik gutxitzen da, gizakiek haiek hil ditzaketelako, alegia. Kausa naturalen eraginez zein zombien eskuetan hildako gizakiek eta hildako zombiek H multzoa osatuko dute. Multzo horretako izakiak berpiztu eta zombi bihurtu daitezke. Hala, zombien multzoa ugartzeko dauden aukerak bi dira: bata, gizakiak

zombiekin elkarrekintzan zombi bihurtzea, eta bestea, hildakoen multzokoak zombi bihurtzea.

Eredu honen formulazioa hiru ekuazio diferentzialen bidez egiten da, eta hiru multzoen aldaketan baturak gizakien jaiotze-indizea ematen du  $G'+Z'+H' = \Pi$ . Horrek esan nahi du denbora pasatu ahala hiru multzoen kopuruaren batura infinitu izango dela. Hau da,  $t \rightarrow \infty$  denean,  $G+Z+H \rightarrow \infty$  izango da, baldin eta gizakien jaiotze-tasa nulua ez bada (hau da,  $\Pi \neq 0$ ). Gizakien kopuruak infiniturantz jotzen ez duenez, beste multzo bien batura izango da infinitu, eta horrek esan nahi du zombien izurriteak zibilizazioaren amaiera ekarriko duela.

**Infekziodunak dauden eredu**

Deskribatu berri dugun eredu oso oinarrizkoa da, eta bera baino eredu errealistagoak eraikitzea posiblea da. Adibidez, horietako eredu batean jo daiteke zombiak gizakia ku-





tsatzen duenean gizakia ez dela segituan zonbi bihurtzen, baizik eta, kutsatu gisa denbora-tarte batez egon ondoren, gizakia hil egin daitekeela edo zonbi bihurtu daitekeela. Oinarritzko ereduan bezala, gizakien jaiotze-tasa nulua ez bada, eredu honetan ere zombien izurriteak gizakien desagertzea ekarriko du, nahiz eta kasu honetan aurrekoan baino denbora gehiago behar izango den hori gertatzeko.

### Tratamendudun eredu

Orain arte ikusitako eredu bietan (oinarrikoan eta infekziodunean), arinago edo beranduago mundua gizakirik barik geratzen da, eta zombiak munduaren jabe egiten dira. Baina, posible al da espezie biak batera biziko diren eredu batean pentsatzea?

Infektatuen edo kutsatuen multzo bat existitzen den jokalekuan, gizakiak sendatzeko tratamendu bat erantsiko dugu. Tratamendu horrek zombiak gizaki-egoerara eraman ahal izango ditu. Horrek ez du esan nahi, ordea, behin gizaki bihurtuta berriz zonbi bihurtu ezin daitezkeenik. Hau da, tratamendua ez dakar berekin immunitatea. Tratamendua dagoen egoera aztertzen badugu, ohartuko gara tratamendua ere ezin duela zonbi-kopurua desagertzea eragin. Zombiak existituko dira, baina gizakia ez da mundutik guztiz desagertuko. Hau da, tratamendua dagoen eredu batean bi espezieak biziko dira munduan.

### MUNDUA ZOMBIEN ESKU ALA GIZAKIEN ESKU?

Zientzia-fikziozko testuinguru batean nor gailenduko ote da? Zombiak nagusituko dira, eredu matematikoak dioen bezala, ala, fikzioan gabiltzanez, aurre egingo die gizakiak zombiei? Hemen, behintzat, *The Walking Dead* serieko gidoiari ideiarekin bat eman diegu serieak aurrera jarrai dezan.

Baina, ba ote dago zombien izurriteaz guztiz bukatzeko aukerarik? Eta, egotekotan, bururatuko ote zaie serieko gidoiari

|  |  |
|--|--|
| <p><b>Harrapari-harrapakin eredu:</b></p> $u'(t) = u(t)(\alpha - \beta a(t))$ $a'(t) = -a(t)(\gamma - \delta u(t))$ <p> <math>u(t)</math>: untxi-kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>a(t)</math>: azeri-kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>\alpha</math>: untxien jaiotze-tasa eta heriotze-tasaren arteko diferentzia parametroa<br/> <math>\beta</math>: azerien jaiotze-tasa eta heriotze-tasaren arteko diferentzia parametroa<br/> <math>\gamma</math>: azerien eragina untxi kopuruan parametroa<br/> <math>\delta</math>: untxien eragina azeri kopuruan parametroa         </p> | <p><b>Zonbi-gizaki eredu:</b></p> $G'(t) = \Pi - \beta GZ - \delta G$ $Z'(t) = \beta GZ + cH - \alpha GZ$ $H'(t) = \delta G + \alpha GZ - cH$ <p> <math>G(t)</math>: gizaki-kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>Z(t)</math>: zonbi-kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>H(t)</math>: hiltako kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>\Pi</math>: gizakien gehikuntza jaiotzen eraginez<br/> <math>\beta</math>: gizakien eragina zombietan parametroa<br/> <math>\delta</math>: zombien eragina gizakietan parametroa<br/> <math>\alpha</math>: kausa naturalengatik heriotzak parametroa<br/> <math>c</math>: zonbi bihurtu daitezkeen hiltakak parametroa         </p> |
| <p><b>Zonbi-gizaki eredu infektatuekin:</b></p> $G'(t) = \Pi - \beta GZ - \delta G$ $I'(t) = \beta GZ - pI - \delta I$ $Z'(t) = pI + cH - \alpha GZ$ $H'(t) = \delta G + \delta I + \alpha GZ - cH$ <p>           Zonbi-gizaki oinarritzko ereduko ezezagunak eta parametroak, gehi berri hauek:<br/> <math>I(t)</math>: infektatuen kopurua <math>t</math> aldinean<br/> <math>p</math>: zonbi bihurtzen diren infektatuek parametroa         </p>  | <p><b>Zonbi-gizaki eredu tratamenduarekin:</b></p> $G'(t) = \Pi - \beta GZ - \delta G + cZ$ $I'(t) = \beta GZ - pI - \delta I$ $Z'(t) = pI + cZ - \alpha GZ - cZ$ $H'(t) = \delta G + \delta I + \alpha GZ - cH$ <p>           Infekziodun zonbi-gizaki ereduko ezezagunak eta parametroak, gehi berri hau:<br/> <math>c</math>: gizaki ogoerara pasatuko diren zombiak parametroa. Hau da, sendatuko diren gizakiak         </p>  |

Formulazio matematikoen laburpena. ARG.: © ELISABETE ALBERDI.

zonbiak betiko deuseztatuko dituen eredu horietakoren bat?

Egon badaude ereduak zeintzuetan gizakia zombiei gailentzen zaien. Nork pentsa dezake horrelako eredu batean? Badirudi *The Walking Dead* seriekoek horietako ereduren baten jakitun direla, eta horren ondorioa izan daiteke serieak daramatzan hiru denboraldiaren gizakiak guztiz desagertu ez izana. ●

### BIBLIOGRAFIA

- [http://es.wikipedia.org/wiki/The\\_Walking\\_Dead\\_\(serie\\_de\\_televisi%C3%B3n\)](http://es.wikipedia.org/wiki/The_Walking_Dead_(serie_de_televisi%C3%B3n)).
- [http://es.wikipedia.org/wiki/Apocalipsis\\_zombi](http://es.wikipedia.org/wiki/Apocalipsis_zombi).
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%99s\\_volterra\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%99s_volterra_equation).
- <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/470416/population-ecology/302363/Lotka-Volterra-equations>.

[http://www.eoearth.org/article/Predator-prey\\_cycles?topic=58072](http://www.eoearth.org/article/Predator-prey_cycles?topic=58072).

BUTCHER, J. C.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 2008.

HAIRER, E.; WANNER, G.; NØRSETT, S.P.: *Solving ordinary differential equations, I, Nonstiff problems*, Springer, Berlin, 1993.

LAMBERT, J.D.: *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

MUNZ, P.; HUDEA, I.; IMAD, J.; SMITH, R.J.: "When zombies attack! mathematical modelling of an outbreak of zombie infection", In: J.M. Tchuente and C. Chiyaka Eds. *Infectious Disease Modelling Research Progress*, Nova Science Publishers, Inc., (2009), 133-150.

Etor zaitetz ezkutuko ingurune natural hau ezagutzera eta abenturaz gozatzera

## Sobrongo abentura-zentroa

kanoa, kayak, paintball, mendi-ibilaldiak, orientazioa, mendi-bizikleta, arku-tiroa, igerilekuak...



Eskola-umeentzako prezio bereziak



01423 Sobron (Araba)  
tel.: 945 359016  
faxa: 945 359137

<http://www.aventurasobron.com>  
h. el.: [info@aventurasobron.com](mailto:info@aventurasobron.com)