



ZENBAKIZKO METODOEN FABULA BAT: ... ETA JATEKO, MAIZTASUN HANDIKO UHINAK

ELISABETE ALBERDI CELAYA
Matematika Aplikatua Saila,
Meatzeen eta Herri Lanen Ingeniaritza
Teknikoko Unibertsitate Eskola, EHU

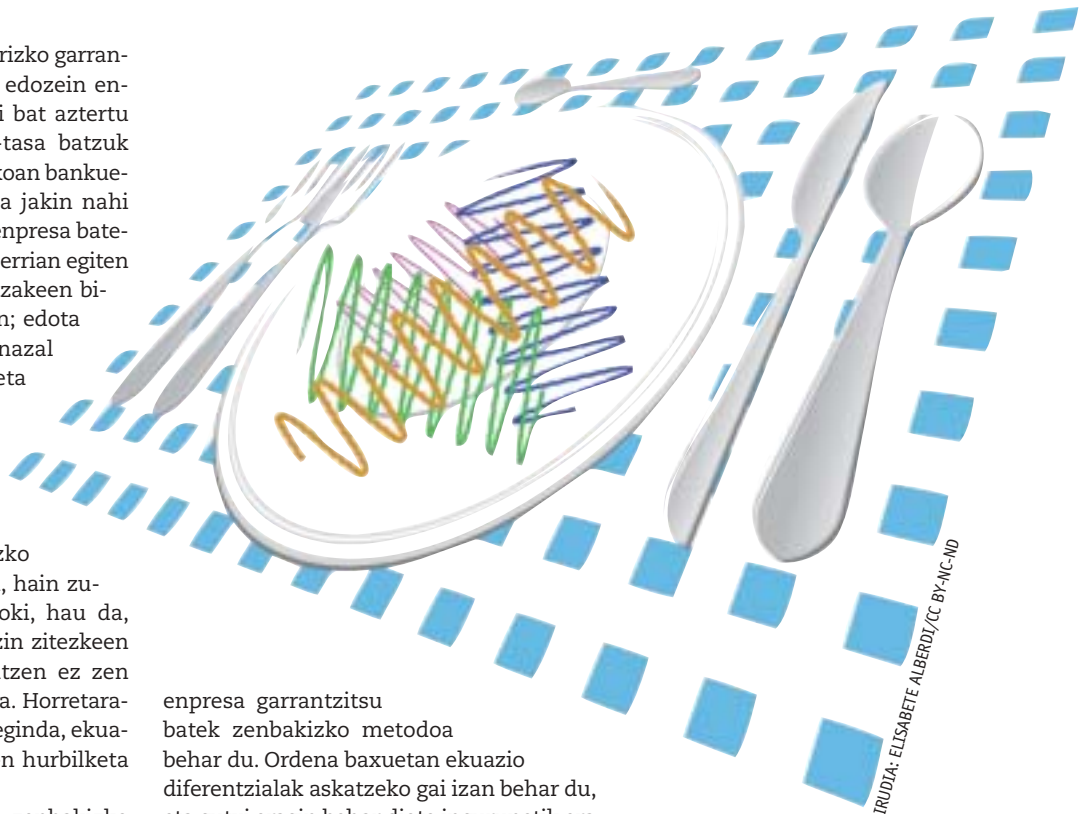
“Zein dira zure zaletasunak?”, galdegin zion pertsonaleko arduradunak aurrez aurre zuen zenbakizko metodoari. “Atsegin dut ekuazio diferentzialak askatzeko dauden metodoei buruzko biografiak irakurtzea”, erantzun zuen metodoak. “Gimnasia joatea ere gustuko dut, kalkuluak azkar egin ahal izateko entrenatzera. Egunero hartzen dut ordubete ariketa horiek egiteko, burua argi mantentzen laguntzen baitidate. Gainerakoan, oso etxeakoa naiz. Gustuko dut ondo jan eta edatea. Edateko, ez dago bertako sagardoa bezalakorik, eta jateko, maiztasun handiko uhinak gustatzen zaizkit”. Pertsonaleko arduradunak jaso zuen mezua: “...eta jateko, maiztasun handiko uhinak...”. Bazekien lankide berri hori aztertzeak lana emango ziola.

ZENBAKIZKO METODOAK

Ekuazio diferentzialek ikaragarriko garrantzia hartu zuten. Han zeuden edozein enpresatan negozio-aukera berri bat aztertu behar zenean; baita, interes-tasa batzuk aplikatuta, urte batzuk igarotakoan bankuetan izango zen diru-kantitatea jakin nahi zenean ere; edota eraikuntza-enpresa bateko ingeniarien artean, alboko herrian egiten ari ziren zubi berriak jasan zitezkeen bibrasioak aztertzen ari zirenean; edota kimika-laborategi batean, gainazal baten tenperatura-sakabanaketa kalkulatu behar zenean... Horiek denek lanpostu berri baten premia identifikatu eta definitzera eraman zituzten hainbat enpresa eta ikerketa-zentro: zenbakizko metodoari zegokion lanpostua, hain zuzen. Haien lana zen analitikoki, hau da, modu zehatz batean, ebatzi ezin zitezkeen edo zehazki ebatzea interesatzen ez zen ekuazio diferentzialak askatzea. Horretarako, egin beharreko eragiketak eginda, ekuazio diferentzialaren emaitzaren hurbilketa bat kalkulatzera lortzen zuten.

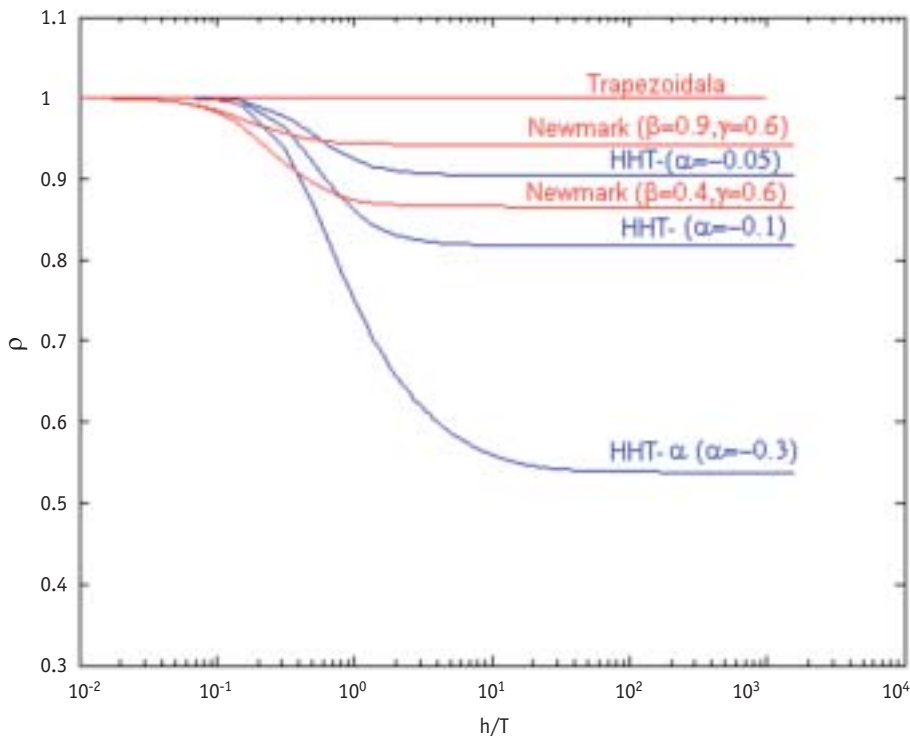
Horrelako lekuren batean zenbakizko metodo bat kontratatu beharra zegoenean, iragarkia jartzen zen prentsan, beste edozein lanposturekin egiten den bezalaxe. Eta horixe egin zuen une hartan elkarriketa egiten ari zen pertsonaleko arduradunak ere: “Eraikinak egiten dituen Bilbo inguruko

enpresa garrantzitsu batek zenbakizko metodoa behar du. Ordena baxuetan ekuazio diferentzialak askatzeko gai izan behar du, eta gutxi eragin behar diote ingurunetik eratorritako perturbazioek edo problemek. Bibrasioei dagozkien problemak ebatzen esperientzia izatea baloratuko da. Maiztasun handiko uhinak gustuko izatea ezinbestekoa da. Soldata ona eta enpresako gimnasia erabiltzeko aukera eskaintzen dira.”



IRUDIA: ELISABETE ALBERDI/CC BY-NC-ND

Posturako jasotako hautagaien curriculumak aztertzen ziren. Zenbakizko metodoaren gaitasun intelektualak eta psikologikoak izaten ziren kontuan. Intelektualen artean,



Zenbakizko metodoen erradio espektralak, pauso-tamainaren (h) eta periodoaren (T) arabera irudikatuta. Erradio espektrala ρ letraz adierazi dugu. Ikusten da HHT- α metodoaren erradio espektralak txikiagoak direla Newmarken zenbait metodorenak baino. IRUDIA: ELISABETE ALBERDI/CC BY-NC-ND.

kontuan hartzen zen metodoak zer-nolako zehaztasunez ebatz zezakeen ekuazio diferentziala. “Problemak ordena ezberdinetako zehaztasunez ebazteko diseinatua eta programatua izan naiz”, esaten bazuen batek, adierazi nahi zuen bilatzen zen emaitza hurbilduarentzat enpresak nahi zuen

zehaztasunez (handia zein txikia) ebatz zitzakeela ekuazio diferentzialak. Beste batzuek lehen edo bigarren ordenan baino ez zuten lan egiten, hau da, ordena baxuetan, eta, beraz, doitasun txikiarekin. Enpresak esku artean zuen proiektuak zehaztasun handiagora behar zuenean, ez ziren kontra-

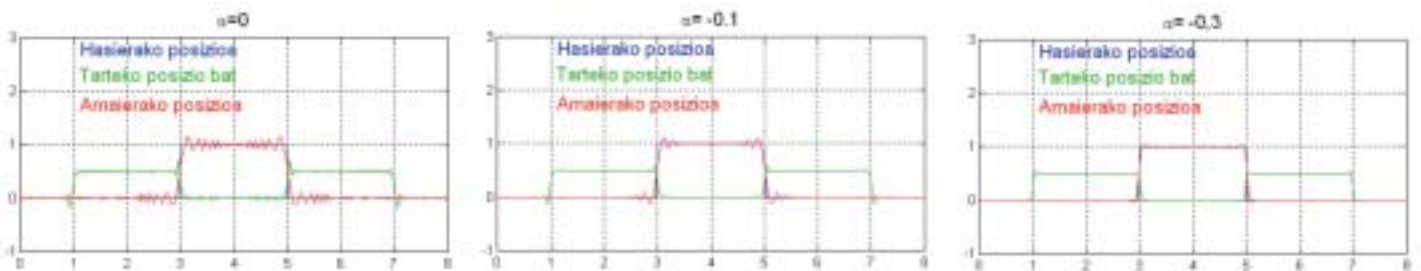
tatzen ordena baxuetan askatzen zutenak. Horrek ez zuen esan nahi ez zegoenik ordena horietan lan egiten zuten langileak kontratatuzko enpresarik; beste batzuetan kontratatuak izan zitezkeen, jakina.

Gaitasun psikologikoei zegokienez, enpresa kontratatzaileak jakin nahi izaten zuen zenbakizko metodoak zer egonkortasun-eremu zuen. Ekuazioak askatzean sortzen ziren akatsen edo perturbazioen aurrean metodoak zuen erantzuna zehazten zuen horrek. Metodoak ekuazio diferentzialak zituen berezitasunetara —autobalioetara— ohitzeko zuen gaitasuna ere islatzen zuen. Metodoak egonkortasun-eremu zabal izateak adierazten zuen bazuela askotariko problemen aurrean jarduteko gaitasuna. Egonkortasun-eremu txikiago batek, aldiz, erakuts zezakeen perturbazio batzuen aurrean metodoak ez zuela emaitza onik emango. Horrelakoetan, egonkortasun-eremutik kanpo ebazitako problemetako perturbazioak handitu egiten ziren, eta kalkulatuak emaitza ez hain ona edo txarra izatera iritsi zitezkeen.

Zenbat kobratzen duzu? “Koste konputazionalaren arabera”. Ordena altuetan lan egiteko gai zena eta perturbazioak ekidindu zituen garesti ordaindu behar zen. Hala, hainbat matematikariren lanak metodo horien diseinuan jartzen zuen arreta.

ERRADIO ESPEKTRALA

Zenbakizko metodoak ezkutuago eramaten zuen ezaugarriren bat ere bazegoen, ordea. Ezkutuko ezaugarrietako bat moteltze algoritmikoa izenekoa zen. Eta horrek erakusten



Pultsu-forma duen uhin-ekuazioa HHT- α metodoa erabilia askatu dugu, α parametroaren hiru balioetarako ($\alpha = 0$, $\alpha = -0,1$ eta $\alpha = -0,3$) eta $\gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2}$ eta $\beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}$ balioetarako, hain zuzen. Horretarako, 400 elementu hartu ditugu uhinean, eta metodoak 1.400 pausu eman ditu, $t = 16$

segundoko denbora-tartean ekuazioa askatzeko. Goiko grafikoetan, uhinaren hasierako eta amaierako posizioak eta tarteko posizio bat irudikatu dira. Problema horren emaitza alboetarantz bidaiatzen duten bi uhin dira, zeinak islatu egiten baitira puntara heltzean eta berriz bat egiten baitute hasierako posizioan. Beraz, hasierako posizioa eta bukaerakoa berdinak dira. Problema metodo ezberdinekin askatuta, ikusten da metodo batzuek beste batzuek baino *kizkur* gehiago eransten diotela emaitzari. Hori gertatzen da zenbakizko metodoak goi-maiztasunak jateko gaitasunik ez duelako. IRUDIA: ELISABETE ALBERDI/CC BY-NC-ND.



zuen zer portaera zuen metodoak maiztasun handiko uhinekin.

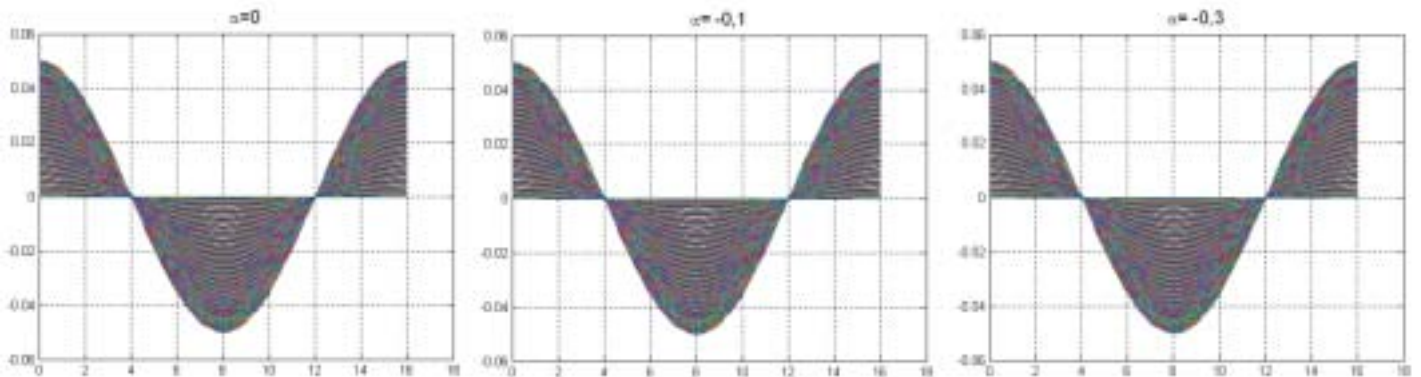
Baziren ordena altukoak eta egonkorrak izan arren maiztasun handiko uhinekin portaera ona ez zuten zenbakizko metodoak. Horrek esan nahi zuen ezen goi-maiztasunak ageri ziren ekuazio diferentzialak askatzen ari ginenean bazeudela metodo batzuk goi-maiztasunak gehiegi jatera jotzen zutenak. Uhin-erako ekuazio diferentzialetan, teorikoki uhina denbora-tarte batean bibrazten ari bazen, zenbakizko metodo horiek emango zuten emaitza hurbilduan uhina bere anplitudea galduz joaten zen, besteak beste, eta uhina guztiz desagertzera ere hel zitekeen. Alderantziz, baziren maiztasun handiko uhinei begiratu ere egiten ez zieten metodoak ere, hau da, halakorik jango ez zutenak. Batzuetan, ordea, hori ere ez zen ona.

Ekuazio diferentzial bat era hurbilduan askatzen ari garenean, ohikoa da emaitza kalkulatu behar diogun eremua elementutan banatzea, hau da, problema diskretizatzea. Elementu bakoitzaren muturrei nodo deritze. Behin eremua elementutan banatuta, zenbakizko metodoa aplikatzen zaio problemari. Problema horrek autobalio batzuk izango ditu, batzuk txikiagoak eta beste batzuk handiagoak. Autobalio txikiek behe-maiztasuneko uhinak emango dizkigute, eta handiek, maiztasun handikoak. Eta problemako autobalio guztiek eragiten dute emaitzan. Gertatzen dena da autobalio handiak askotan diskretizazioaren ondorio baino ez direla, eta, hori dela eta, ez dutela ezer edota ezer onik eranstean azken emaitzan. Beraz, zenbakizko metodoen bidez ekuazio diferentzial bat askatzen ari gare-

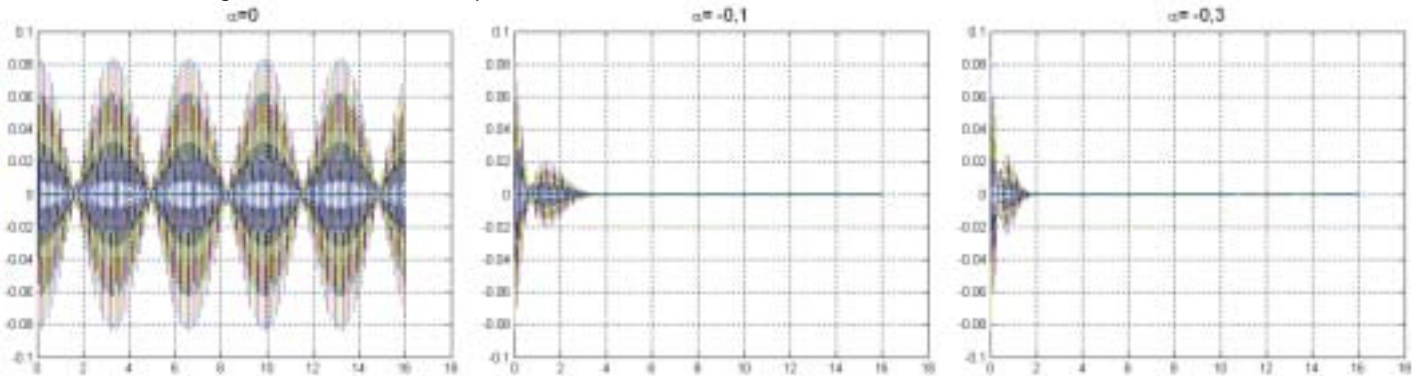
nean, ordenaz eta egonkortasunaz gainera, interesatzen zaigu diskretizazioaren ondorio izan daitezkeen maiztasun handiko uhin horiek neurri batean jango dituen metodo bat aplikatzea. Hau da, arazoaren gako da aplikatuko dugun zenbakizko metodoa maiztasun handiko uhinak neurrian jateko gai izatea.

Metodo bakoitzak anplifikazio-faktore bat dauka hari lotuta. Anplifikazio-faktore horren modulerik handieneko autobalioari erradio espektral deritzo. Erradio espektral horren balioa, bestetik, ekuazio diferentziala askatzeko erabiliko dugun metodoan emango dugun pausoaren tamainaren eta periodoaren arabera da. Pausoaren tamaina periodoaz zatituta balio txikia lortzen den kasuei dagokien erradio espektralak erakusten digu zenbakizko metodoak zer portaera

Lehenago autobalioaren eraginez zenbait nodok duten portaera metodoan konstante ezberdinak hartzean:



350. autobalioaren eraginez zenbait nodok duten portaera metodoan konstante ezberdinak hartzean:



Pultsu-forma duen uhin-ekuazioa HHT- α metodoa erabilia askatu dugu, α parametroaren hiru balioetarako ($\alpha = 0$, $\alpha = -0,1$ eta $\alpha = -0,3$) eta $\gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2}$ eta $\beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}$ balioetarako, hain zuzen. Horretarako, 400 elementu hartu ditugu uhinean, eta metodoak 1.400 pausu eman ditu, $t = 16$

segundoko denbora-tarte batean. Goiko grafikoetan, denbora-tarte osoan zenbait nodok 1. eta 350. autobalioaren eraginez duten portaera irudikatu da. $\alpha = -0,1$ eta $\alpha = -0,3$ kasuetan, ikusten da 350. autobalioaren moteltzea gertatzen dela. IRUDIA: ELISABETE ALBERDI/CC BY-NC-ND.



izango duen behe-maiztasuneko uhinekin. Pausoaren tamaina periodoaz zatituta zenbaki handia lortzen den kasuei dagokien erradio espektralak, aldiz, esango digu zelan portatuko den zenbakizko metodoa maiztasun handiko uhinekin. Pausoaren tamaina periodoaz zatituta handitzen doan neurrian erradio espektralaren balioa txikituz badoa, horrek esan nahi du metodoak maiztasun handiko uhinak moteltzera joko duela.

Bi parametreri (β , γ) balioak emanez lortzen den Newmark-en familiako metodoak 2. ordenakoak dira

$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ denean,}$$

eta egonkortasun-ezaugarri nahiko onak dituzte. Newmarken metodoan

$$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2} \text{ balioak hartzen ditugunean,}$$

metodo trapezoidala izenekoa lortzen da, 2. ordenakoa eta egonkortasun-eremu handikoa. Gainera, erradio espektralaren balio unitatea da beti. Horrek esan nahi du goizein behe-maiztasuneko uhinak bere horretan mantenduko dituela, ezertxo ere moteldu barik. Hori ona da neurri batean, denbora pasatu ahala uhina osorik mantenduko baita; baina, bestetik, ez da hain ona, diskretizazioaren ondorio diren maiztasun handiko uhinak moteltzea ondo etor baitaiteke.

HHT- α metodoa Newmarken metodoan oinarrituta eraikita dago, eta hiru parametreri (α , β , γ) balioak emanda lortzen da. Eta

$$\alpha \in [-1/3, 0], \gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2} \text{ eta } \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}$$

aukeratzen dugunean, HHT- α metodoa 2. ordenakoa da, egonkortasun-ezaugarri onak ditu eta, gainera, goi-maiztasunak moteltzea lortzen du. Hori ona da diskretizaziotik eratorritako goi-maiztasunen efektua txikiagotu egingo duelako metodoak. HHT- α metodoan $\alpha = 0$ aukeratzen dugunean, Newmarken familia lortzen da. Eta aipatutako γ eta β -ren adierazpenetan $\alpha = 0$ hartuta, Newmarken familiako metodo trapezoidala lortzen da.

GAOKO: METODO BAKOITZARI ONDO EGIN DEZAKEEN LANA EGOKITZEA

Beste lanpostu batzuetan bezalaxe, zenbakizko metodo bakoitzari ondoen egingo



Maiztasun handiko uhinak jaten dituen metodoa



Maiztasun handiko uhina

Maiztasun handiko uhinak jaten dituen metodoa uhinaren atzetik korrika. IRUDIA: ELISABETE ALBERDI/CC BY-NC-ND.

zuen lana egokitzean zetzan gakoa. Pertsonaleko arduradunak galdera bat zuen buruan: kontratatuko zuten zenbakizko metodoak maiztasun handiko uhinak gustuko izatea zen iragarkian jartzen zuten baldintzetako bat, baina zer neurritan ote zituen gustuko?

Pertsonaleko arduraduna honela zuzendu zitzaion elkarrizketatu berri zuen metodoari: "Proba txiki bat egin behar dizut, zure ordena eta egonkortasun-eremua ziurtatzeko eta zure erradio espektrala kalkulatzeko".

Proba egin eta handik denbora batera, pertsonaleko arduradunak ezaugarri horien emaitzak eskuratutakoan, honela zuzendu zitzaion metodoari: "ordena baxuetan aritzeko gaitasuna duzula ikusten dut. Egonkortasun-eremu oso ona daukazu, ia ezerk ez dizu zirkinik eragiten. Gainera, erradio espektralari dagokionez, ikusten dut neurri batean baino ez diezula eragiten maiztasun handiko uhinei, ez gehiegi, ez gutxiegi. Askatu behar ditugun problemetarako egokia zara. Ongi etorri eraikuntzan esperientzia duen gure enpresara".

Horrenbestez, eraikinak egiten zituen Bilboko enpresa garrantzitsuak HHT-alfa metodoa kontratatu zuen. ●



BIBLIOGRAFIA

- BUTCHER, J.C.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, 2008.
- FARLOW, STANLEY J.: *Partial differential equations for scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, 1993.
- HAIRER, E.; WANNER, G.: *Solving ordinary differential equations, II, Stiff and Differential Algebraic Problems*, Springer, 1996.
- HILBER, H.M.; HUGHES, T.J.R.; TAYLOR, R.L.: "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", in *Earthquake engineering and structural dynamics*, 5 (1977), 283-292.
- HUGHES, THOMAS J.R.: *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall International Editions, 1987.
- LAMBERT, J.D.: *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*, John Wiley & Sons, 1991.
- NEWMARK, N.M.: "A method for computation for structural dynamics", in *Journal of the Engineering mechanics division, ASCE*, 85 (1959), 67-94.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor R.L.; Zhu, J.Z.: *The finite element method, Its basis & fundamentals*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.