Frogapen geometrikoak

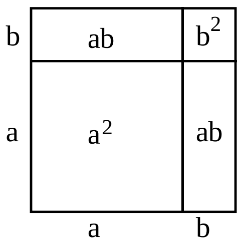
P. Angulo

Pitagorasen teorema ez da geometriaren bidez froga daitekeen bakarra. Matematikako berdintza eta desberdintza asko irudi geometrikoak erabiliz egiazta daiteke. Artikulu honetan horietako batzuk aurkeztuko dizkizugu.

Lehenengo irudian oinarrizko formuletako baten egiaztapen geometriko sinplea ikus dezakegu:

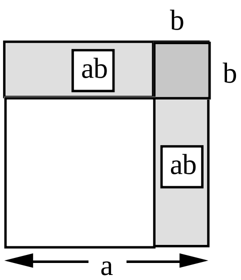
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Bigarren irudian aurreko formularen antzekoa den

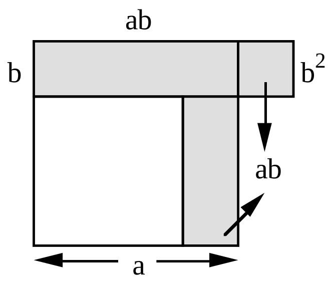


1. irudia.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



2. irudia.



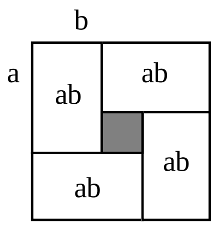
3. irudia.

formulari dagokion adierazpen geometrikoa dugu. Kontura gaitezen b^2 batugaiari dagokion karratua ab batugaiari dagokion laukizuzenaren barnean dagoela eta a^2 karratuari bi aldiz (-2ab) kentzen zaiola.

Bigarren irudian b^2 karratua a^2 karratutik ateratzen badugu (3. irudia), marratutako azalera, 2ab, ez da aldatzen. Orain, ondoko desberdintza agerian dugu:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

Desberdintzekin segituz, aurrekoaren baliokide den beste desberdintza baten frogapen geometrikoa erakusten digu 4. irudiak:



4. irudia.

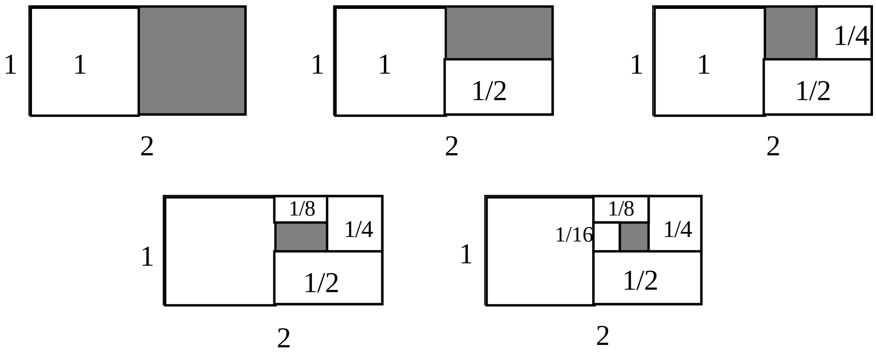
$$4ab \leq (a + b)^2$$

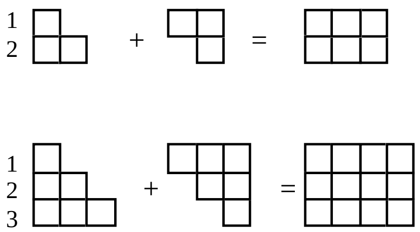
Kalkula dezagun orain infinitu batugai duen batuketa (5. irudia). 1 aldeko karratuari bere erdia erantsiz, 1 + 1/2 = 3/2 lortuko dugu. Batura horri karratuaren laurdena gehituta, 1 + 1/2+ + 1/4 = 3/2 + 1/4 = 7/4 emaitza dugu. Azken honi zortzirena gehituz gero, 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/4 + 1/8 = =15/8. Irudian ikus daitekeenez batura hori 2 baino txikiagoa da. Hurrengo batugaia, 1/16, bete gabe dagoen hutsunean sar daiteke. Estali gabe geratzen den hutsunean hurrengo batugai guztiak sartu ahal izango ditugu beti. Azkenik, 1x2 laukizuzena estaliko dugu. Hortaz,
berdintza lortuko dugu. Berdintza horretan agertzen diren puntuek

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.. = 2$$

infinitu batugai dagoela adierazten dute.

Beste formula batera pasatuz, lehenengo zenbakien batura kalkulatuko dugu. Horretarako oinarrizko karratuez baliatuko gara. (Ikus 6. irudia).

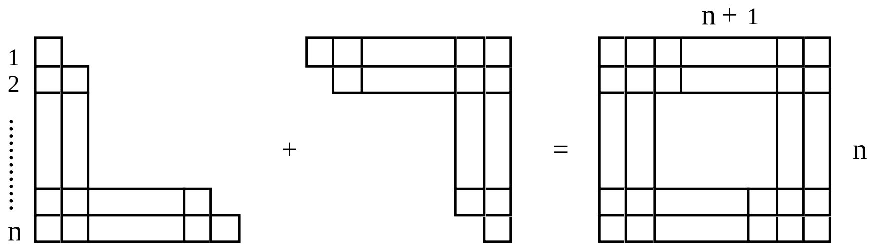




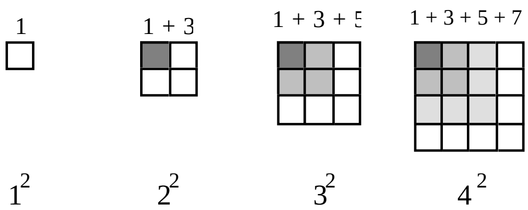
beraz, $1 + 2 = \frac{2 \,.\, 3}{2} = 3$

beraz, $1 + 2 + 3 = \frac{3 \,.\, 4}{2} = 6$

6. irudia.



7. irudia.



8. irudia.

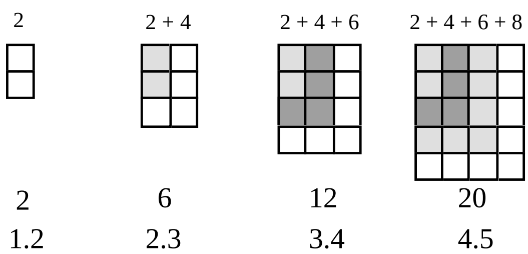
$1 = 1$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

....

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$



9. irudia.

$2 = 1 \times 2$

$2 + 4 = 6 = 2 \times 3$

$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5$

....

$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n\,(n + 1)$

Horrela segituz gero, lehenengo n zenbakien batura kalkulatuko dugu (ikus 7. irudia).

hots, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2}$.

Oinarrizko karratuak erabiliz beste formula batzuk froga ditzakegu. 8. irudiak agerian uzten digu zenbaki bakoitien baturak zenbaki karratuak direla.

Zer gertatzen da zenbaki bikoitiekin?. Ikus dezagun.

Zenbaki bikoitien baturek ez dute karraturik osatzen; laukizuzenak baizik. (Ikus 9. irudia).

Horra hor beste formula berri baten adierazpen geometrikoa.

Bukatzeko, beste formula zailago baten azalpen geometrikoa emango dugu;

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

formularena, alegia.

Aurreko formulen adierazpenen ildoari jarraituz, ondoko berdintzak lortuko ditugu:

$1^3 = 1$

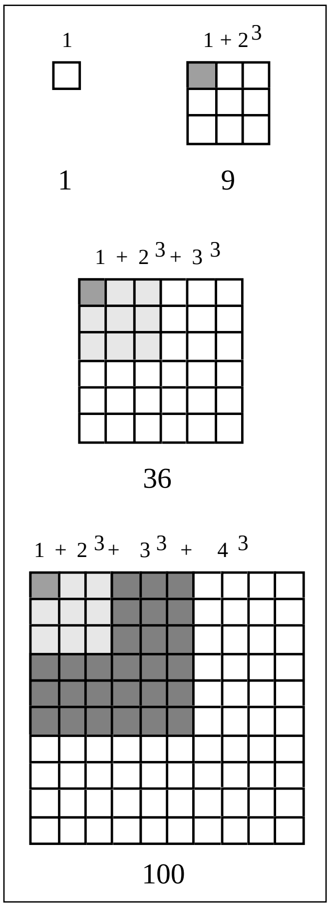
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 =$

$= (1 + 2 + 3 + 4)^2$

eta emaitzak oro-



10 irudia.

kortuz, aipatu formula lortuko genuke.