Ertzeko oharrik ospetsuena

Patxi Angulo

Pitagorasi edo bere eskolari leporatzen zaion emaitza ezagunena, triangelu zuzenetako katetuak eta hipotenusa lotzen dituen formula da; Pitagorasen Teorema ezaguna, alegia: “triangelu zuzenetan katetuen karratuen batura hipotenusaren karratuaren berdina da”. Emaitza egiptiarrek eta babiloniarrek aspaldi ezagutu eta erabiltzen zuten. Baina, haiek problema partikularrak ebazteko erabiltzen zuten bitartean (hau da, kasu batzuetan betetzen zela besterik ez zekiten), grekoek berdintza kasu guztietarako baliagarria zela ezarri zuten. Pitagoras Fenizia eta Egipton luze ibili zen. Ez litzateke harritzekoa, beraz, teorema babiloniar eta egiptiarrengandik ikasi izana. Esate baterako, egiptiarrek 12 zati berdinetan banatutako soka erabiltzen zuten angelu zuzenak egiteko. Izan ere, 3, 4 eta 5 zatiko aldeak zituen triangelua zuzena baitzen.

Pitagorasen irudia duen antzinako txanpona.

Algebraikoki honela idatz daiteke, x, y katetuak eta z hipotenusa badira,

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

Berdintza hori betetzen duten x, y, z zenbakien infinitu balio aurki daiteke. Bestela esan, infinitu triangelu zuzen eraiki daiteke.

K.a. VI. mendetik K.o. 100 eta 400 urte-bitartera pasako gara. Garai hartan, Grezian bertan, Diofanto bizi zen (Oraindik ez dakigu zein urtetan bizi zen. Dakigun datu bakarra 84 urtez bizi izan zela da, bere hilartitzetik ondoriozta daitekeenez). Diofantoren lan handiena “Aritmetika” izan zen. Gaur egun arte horren erdia heldu da. Problema askotan Diofantok baldintza bat jartzen zuen soluzioak bilatzeko unean: soluzioek zenbaki arruntak izan behar dute (ez zatikiak, ez hamartarrak). Gaur egun, soluzio arruntak bilatzen dituen analisiari diofantiar deritzo eta zenbaki-teoriaren eremu zabala betetzen du. Goiko berdintzaren soluzio diofantiar bat egiptiarrek erabiltzen zutena da:

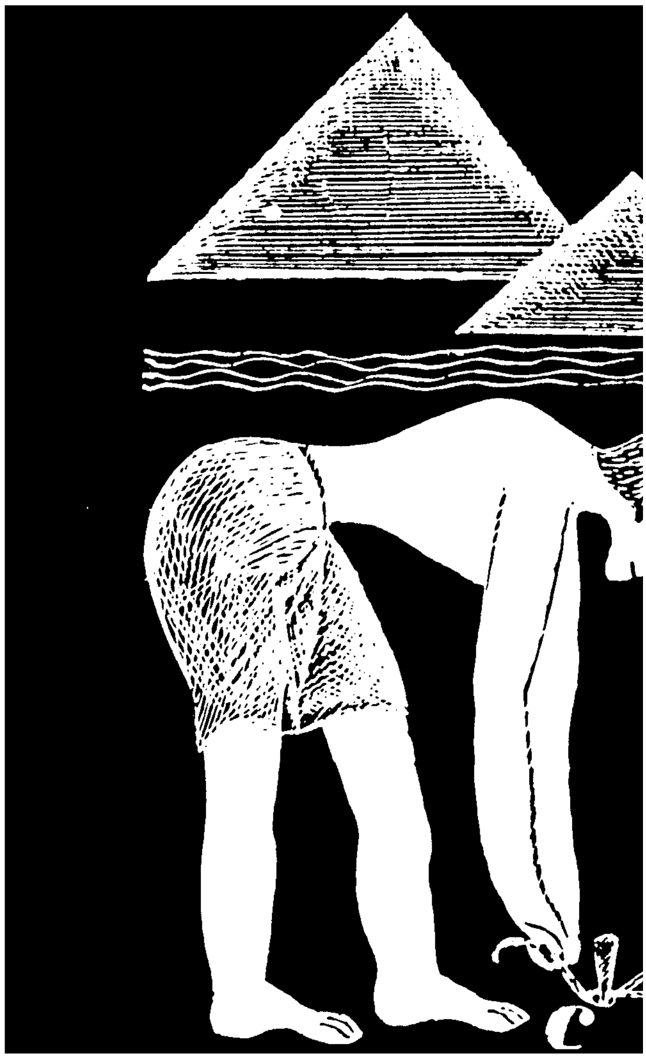
$$3^2 + 4^2 = 5^2 .$$

Egia esan, ekuazio pitagorikoa betetzen duten hirukoteak infinitu dira:

$$x = m \cdot n, \quad y = \frac{m^2-n^2}{2}, \quad z = \frac{m^2+n^2}{2},$$

z. k. h. (m,n) = 1 izanik.

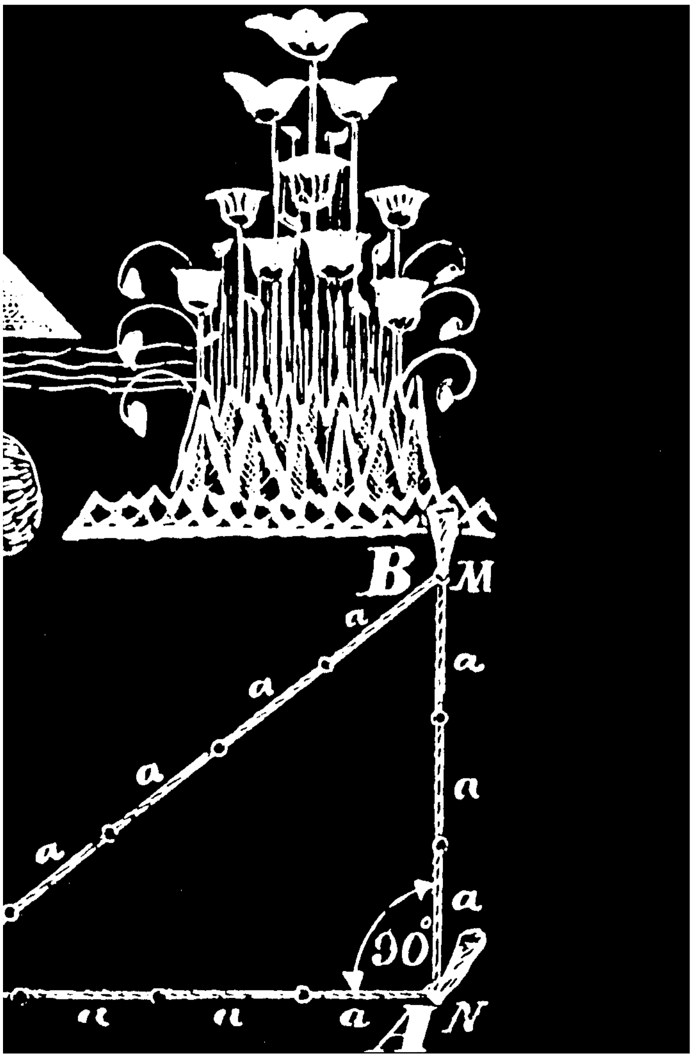
Diofantoren Aritmetikaren bertsio bat, Bachet Mèziriackoak grekotik latinera egindako “Diophantus” egokitzapena hain zuzen ere, Pierre Fermat abokatua-



ren eskuetara ailegatu zen XVII mendean. P. Fermat Tolosatik gertu jaio zen 1601. urtean. Abokatu izan arren, matematikazalea zen eta luze aritzen zen matematikaz, bere ekarpenak maisu-lanak izan zirelarik.

Diofantoren lana matematikari aplikatuentzat ez omen zen praktikoa eta matematikari espekulatzaileentzat, berriz, algoritmikoegia omen zen. Baina, Fermat erakartzeko gauza izan zen eta horri esker zenbaki-teoria modernoaren sortzaile bihurtu zen. Gaiaren eite desberdinek liluratu zuten Fermat, besteak beste, zenbaki beteek eta lagunek, zenbaki irudizkoek, karratu magikoek, hirukote pitagorikoek, zatigarritasun-teoriak eta, batez ere, zenbaki lehenek.

Fermatek, irakurle askok bezala, liburuen ertzetan oharrak idazteko ohitura zuen. Ertz haietan teorema asko utzi zuen idatzirik; batzuk frogaturik eta besteak, aldiz, frogapenik gabe. Gero, teorema guztiak edo frogatu edo gezurtatu egin dira, bat ezik. Diofantoren VIII. problemaren alboan, zeinetan ekuazio pitagorikoaren soluzio arruntak eskatzen baitziren, Fermatek hauxe idatzi zuen gutxi gorbehera: “Aitzitik, ezin da zatitu kubo bat bi kubotan, 4. berredura 4. bi berreduratan eta, oro har, bi baino handiagoa den edozein berredura gradu bereko bi berreduratan. Teorema orokor honen frogapen harrigarria aurkitu nuen, baina ez da ertz honetan sartzen”.



Beste hitzetan esanda, Fermaten azken teoremak dioena hauxe da: *n* 2 baino handiagoa denean,

$$x^n + y^n = z^n$$

ekuazioak ez du soluzio arruntik.

n = 3 denean, problemaren irudi geometrikoa egin daiteke. Unitate kubo batzuekin kubo bat osatu, beste unitate kubo batzuekin beste kubo bat osatu. Bi kubo horiek osatzen dituzten unitate kuboekin beste kubo handiagoa osatzen saiatzen bazara, ez duzu lortuko. Hori da, hain zuzen, teoremak dioskuna. Azken teorema esaten bazaio, ez da Fermatek egindako azkena izan zelako; egin zituenetan frogatu gabe geratzen den azkena delako baizik. 1908. urtean Walfskehel doktoreak 100.000 markoko saria eskaini zuen teorema frogatzen zuenarentzat. Sariketaren indarraldia 2007. urtean bukatuko da.

Pierre Fermat

Fermaten teorema *n* -ren balio askotarako dago frogaturik, baina ez guztietarako. Hala ere, orain arte ezagutzen diren emaitzen arabera Fermaten baieztapena egia dela susmatzen da, batipat 1984ean Faltings matematikari alemaniarrak lortu zituen emaitza eta metodo berriak direla medio. Faltingsek 2 baino handiagoa den n bakoitzerako

$$x^n + y^n = z^n$$

berdintza betetzen duten x, y, z hirukoteen kopurua finitua zela frogatu zuen.

Problema hau ebazteko egin diren ahaleginek antzinatean hiru problema klasikoak ebazteko egin ziren ahaleginek baino garapen matematiko handiago eta garrantzitsuagoak sortu dituzte. Kasu askotan, espero ez ziren emaitza pozgarriak izan dira.

Fermaten bizitza aztertu dutenak, bi taldetan banaturik daude: batzuek Fermatek teorema benetan frogatu zuela uste dute eta besteek edo ez zuela frogapenik edo zeukan frogapena zuzena ez zela uste dute.