

Problema irekia

Patxi Angulo

Ramon Urkolak proposatu zidan problema hau. Finka dezagun 1 diametroko zirkunferentzia. Bere inguruan poligono inskribatu eta zirkunskribatuak irudikatuko ditugu, baina poligono horiek ez dira arruntak izango. Ondoko prozedurari jarraituko gaitzaizkio: k aldeko poligono zirkunskribatua irudikatu eta bere $P_0(k)$ perimetroa kalkulatu dugu. Bigarren urratsean $P_0(k)$ perimetro hori bigarren poligono inskribatu eta zirkunskribatu berrien alde-kopurutzat hartuko dugu eta beren perimetro berriak kalkulatu ditugu; $p_1(k)$ eta $P_1(k)$ alegia; $P_1(k)$ perimetroa (poligono zirkunskribatuarena) beste bi poligono berrien alde-kopurutzat hartu eta bi perimetro berriak kalkulatu, $p_2(k)$ eta $P_2(k)$. Horrela segituz bi poligono-segida eta dagozkien perimetroen segidak lortuko ditugu:

Inskribatuena: $p_0(k), p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k), \dots$
Zirkunskribatuena: $P_0(k), P_1(k), P_2(k), \dots, P_n(k), \dots$

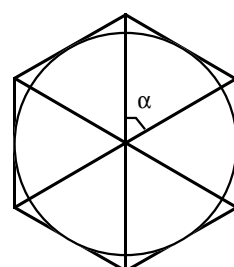
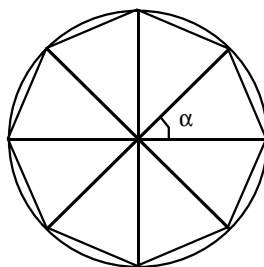
Gogoan izan $P_n(k)$ bakoitzak bi esanahi dituela: poligono zirkunskribatu baten perimetroa eta hurrengo poligono inskribatu eta zirkunskribatuen alde-kopurua.

Galdera hau da, bi segida horiek limiterik ba al dute?

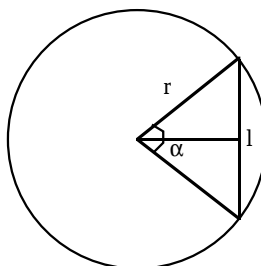
Azpitarratzekoa da hemen agertzen diren poligonoak "poligono teorikoak" direla. Izan ere, $P_n(k)$ perimetroa zenbaki erreala da, eta ez du zertan beti zenbaki arrunta izan behar. Esaterako, taulari begira, $k = 3,5950$ hartzen dugunean 3,5950 aldeko poligonoa agertzen zaigu. Hori ez da oso poligono arrunta, noski.

Poligonoen perimetroa kalkulatzeko angelu zentrala ezagutu behar da. Horretaz baliatzen gara poligono kontzeptua hedatzeko: m (arrunta) aldeko poligono

erregularrak m triangelu isoszeletan bana daitezke, alde berdinek osatzen duten α angelua $\alpha = 2\pi/m$ delarik. Problema honetan m zenbakia erreala hartuko dugu.



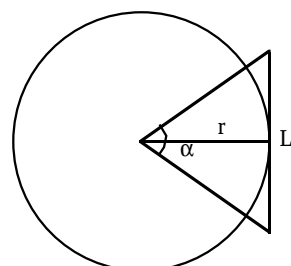
Hona hemen poligono inskribatu eta zirkunskribatuen perimetroen formulak: α poligonoei dagokien angelu zentrala; l , L poligonoen aldeen luzerak; k alde-kopurua eta r erradioa.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{k} \text{ beraz } l = 2r \sin \frac{\pi}{k}$$

$$\text{eta perimetroa } p = 2r k \sin \frac{\pi}{k}$$



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{L/2}{r} \Rightarrow L = 2r \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{k} \text{ beraz } L = 2r \tan \frac{\pi}{k}$$

$$\text{eta perimetroa } P = 2r k \tan \frac{\pi}{k}$$

Ramon Urkolak taulan agertzen diren datuak lortu zituen. Segida hasteko aukeratu zuen lehenengo alde-kopurua $k = 3,0100$ izan zen. Handik abiatuz $p_0 = 2,6014$ eta $P_0 = 5,1718$ perimetroak kalkulatu zituen. Hurrengoan $k = 5,1718$ alde-kopurua hartuz $p_1 = 2,9519$ eta $P_1 = 3,5950$ atera zituen. Horrela lortu zituen hurrengo perimetro guztiak.

Taula aztertuz p_n perimetro-segidak 2,82... inguruan oszilatzen duela ikusten da. Gauza bera gertatzen da P_n perimetro eta 4 zenbakiarekin. Horrek pista ematen digu, 2,82... (edo zehatzago $2\sqrt{2}$) eta 4 al dira p_n eta P_n segiden limiteak?. Bi kasuetan $2\sqrt{2}$ eta 4 perimetroak karratu inskribatu eta zirkunskribatuei dagozkio.

Horrelako zirkunferentzian (1 diametroko zirkunferentzian, alegia) poligono inskribatuen perimetroek $2\sqrt{2}$ baliorantz jotzen dute, hau da, $2\sqrt{2}$ perimetroko (alde-kopuruko) poligonoa lortzen da. Poligono hori karratua da. Poligono zirkunskribatuen perimetroek, aldiz, 4 balioa dute limitetzat. Balio hau ere karratu bati dagokio. Bi kasuetan hurbilketak gutxiagozko eta gehiagozko balioak txandakatuz gertatzen dira (ikus taula).

Hurrengo galdera hau da: zirkunferentziaren diametroa eta poligonoen perimetroak hertsiki loturik daude. Beraz, diametro desberdinetarako emaitza desberdinak lortuko al dira?, zein da diametroa eta limiteen arteko erlazioa?

Beste galdera bat, alde-kopurutzat poligono zirkunskribatuen perimetroak hartu beharrean inskribatuenak hartuko bagenitu zein emaitza lortuko genuke?.

Azkenik, perimetroen segidak hasteko aukeratzeko den lehenengo alde-kopurua edozein izan al daiteke?.

k alde-kopurua	$p_n(k)$ perimetroak	$P_n(k)$ perimetroak
3,0100	2,6014	5,1718
5,1718	2,9519	3,5950
3,5950	2,7567	4,2948
4,2948	2,8688	3,8549
3,8549	2,8052	4,0897
4,0897	2,8416	3,9511
3,9511	2,8208	4,0286
4,0286	2,8327	3,9838
3,9838	2,8259	4,0092
4,0092	2,8298	3,9947
3,9947	2,8276	4,0030
4,0030	2,8288	3,9982