PARADOXAK
(eta II)

Patxi Angulo
Irudiak: J. Pardo

Ba al dago lekurik bat gehiagorentzat?

Pentsa beza irakurleak bere gela guztiak okupaturik dituen hotel arrunt batez. Goiz batean bidaiari bat ailegatu da gela eske. Harrerakoak ezezkoa eman dio gelarik ez dagoela esanez. Egoera tipikoa.

Pentsa beza orain hotel harrigarri batez. Hotel horrek infinitu gela dauka eta guztiak beterik. Bidaiari bat heldu da eta harrerakoak, atseginez, honela dio: gela guztiak beterik dauzkagu; hala ere, gela bat bilatuko dugu zuretzat. Zer egingo du harrerakoak bidaiariari gela bat emateko, guztiak beterik badaude?

Are gehiago, pentsa beza irakurleak, egun berean talde infinitu bat ailegatzen dela ekitaldi batean parte hartzeko. Orain, ezarri behar diren maizterren kopurua infinitua da. Hala ere harrerakoa, eskarmentuari esker, ongi moldatu da eta maizter guztiak gela banatan ezarri ditu. Nola lortu du?.

Paradoxa hauek, lehenengo aldiz 1920.eko hamarkadan aurkeztu zituen David Hilbert matematikari alemanak eta Georg Cantor-en zenbaki transfinituen teorian sendo finkatzen dira. Georg Cantor matematikaria, alemana hau ere, izan zen multzo infinituek Antzinatetik sortzen zituzten paradoxak gainditzeko metodo egokia aurkitu zuen lehena. Infinituaren paradoxa hauek Eleako Zenonen antzinako Grezian ere baziren. 1634. urtean Galileo, bere *Zientzia berriei buruzko solasak* liburuan, hotel infinituaren antzeko problema bat ikertzean, zenbaki arrunt eta zenbaki arrunten karratuen kopuruak infinitu zirela ulertu zuen; $n \leftrightarrow n^2$ bijekzioaren bidez, bi multzoek elementu-kopuru berdina zutela ezarri zuen. Hala ere, Euklidesen postulatuetan (guztia bere parteen batura da) oinarritzen zenez ez zen konturatu. Cantorek, berriz, multzo infinituaren definizioan bana banako korrespondentzia erantsi zuen: multzo infinitua da bere parte edo azpimultzo batekin bana banako korrespondentzian jar daitekeena.

Honela sortu ziren zenbaki transfinituak multzo infinituen kardinala (elementu-kopurua) adierazten dituztenak. Lehenengo zenbaki transfinitua $\aleph_0$ (alef-zero) da eta zenbaki arrunten kopurua adierazten du.

Multzo infinituen definizioan oinarritzen da gure paradoxen ebazpena. Lehenengoan, harrerakoak 1 gelan dagoen maizterra 2 gelara pasatuko du; 2 gelakoa 3 gelara; 3 gelakoa 4 gelara eta horrela segituko du dauden maizter guztiei gela bana egokituz eta etorri den berriari 1 gela emango dio. Hotel infinituan dauden gela eta maizterren kopuruak $\aleph_0$ dira; maizter berriari gela eman eta gero maizterren kopurua $\aleph_0 + 1$ izango da, gelena, aldiz, ez da aldatu $\aleph_0$, eta, hala ere, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ dugu.

Bigarrenean, harrerakoak 1 gelako maizterra 2 gelara eramango du; 2 gelakoa 4 gelara; 3 gelakoa 6 gelara; 4 gelakoa 8 gelara, etab. ($n \leftrightarrow 2n$). Honela 1, 3, 5, 7, 9, ... gelak libre geratuko dira eta horietan sartuko ditu infinitu maizter berriak ($n \leftrightarrow 2n - 1$). Oraingoan, maizter-kopuru berria $\aleph_0 + \aleph_0$ da eta gela-kopurua $\aleph_0$. Beraz $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Ikusten denez, Euklides-en postulatuak ezin zaizkie multzo infinituei aplikatu. Ez dira betetzen aritmetika arruntaren legeak ere.

Bizarginak ba al dauka bizarrik?

Herri txiki batean bizargin bakar bat bizi da. Bere lanbidea, *bere buruari bizarra kentzen ez dioten* guztiei bizarra kentzea da. Bizargina goibel dago, ez bait daki bere buruari bizarra kendu behar dion ala ez.

Izan ere, logikoa da bere buruari bizarra kentzea, hala ere, bere buruari bizarra kentzen badio ez du baldintza betetzen bere buruari bizarra kendu ahal izateko. Eta, bere buruari bizarra kentzen ez badio, baldintzaren arabera, bere buruari kendu egin beharko lioke bizarra. Ez da makala bizarginaren arazoa. Zer egin behar du?.

Paradoxa hau Bertrand Russell filosofo ingelesak argitaratu zuen 1918. urtean. Hitz apaletan, bi pertsona-mota dago herrian: bere buruari bizarra kentzen diotenak eta kentzen ez diotenak. Benetako galdera hauxe da: zein multzotakoa da bizargina?. Egia esan, bizarginak existitzerik ez du, bere existentziak ondorio kontraesankorretara eramango bait luke.

Hala ere, auzia ez da horren sinplea, egitura Russellen beste paradoxaren antzekoa bait da, bere buruaren elementu diren multzoen antzekoa alegia. Paradoxa honen mamia, propietate edo deskribapen bakoitzari multzo bat dagokiela onartzean datza. Adibidez, Lurrak duela 100 urte zeuzkan sateliteen multzoa defini daiteke, bere elementu bakarra ilargia

delarik. Satelite artifizialen multzoak, aldiz, ez dauka elementurik. Hala ere, existitzen da (multzo hutsa). Russellen paradoxa bere buruaren elementu diren ala ez diren multzoei dagokie. Esate baterako, ortzadarreko koloreen multzoa ez da multzoaren (bere buruaren) elementu; ez bait da kolore bat, multzo bat baizik. Baina, 10 baino elementu gehiago daukaten multzoen multzoak 10 elementu baino gehiago dauka. Beraz bere buruaren elementu da. Multzoa H izendatzen badugu, hegaztien multzoa, h, bere elementua da; ibaien multzoa, i, ere bai; automobilena, k; arrainena, a; letrena, l; pertsonena, p; zakurrena, z; behiena, b; orduena, o; mendiena, m; telefonoena, t; ...... , hau da:

Matematikaren inguruan

H = {h,i,k,a,l,p,z,b,o,m,t,.....}

Beraz, H berak 10 baino elementu gehiago dauka eta

H = {h,i,k,a,l,p,z,b,o,m,t,H,.....}.

Buelta gaitezen bere burua elementutzat ez duten multzoetara. Galdera ondokoa da: bere buruaren elementu ez diren multzo guztien multzoa bere buruaren elementu al da?. Bizarginarekin gertatzen zen bezala, orain ere, eta hitz apaletan, bere buruaren elementu ez diren multzo guztien multzoa ez da bere buruaren elementu, baldin eta soilik baldin bere buruaren elementu bada. Jakina, kontraesana dago hemen.

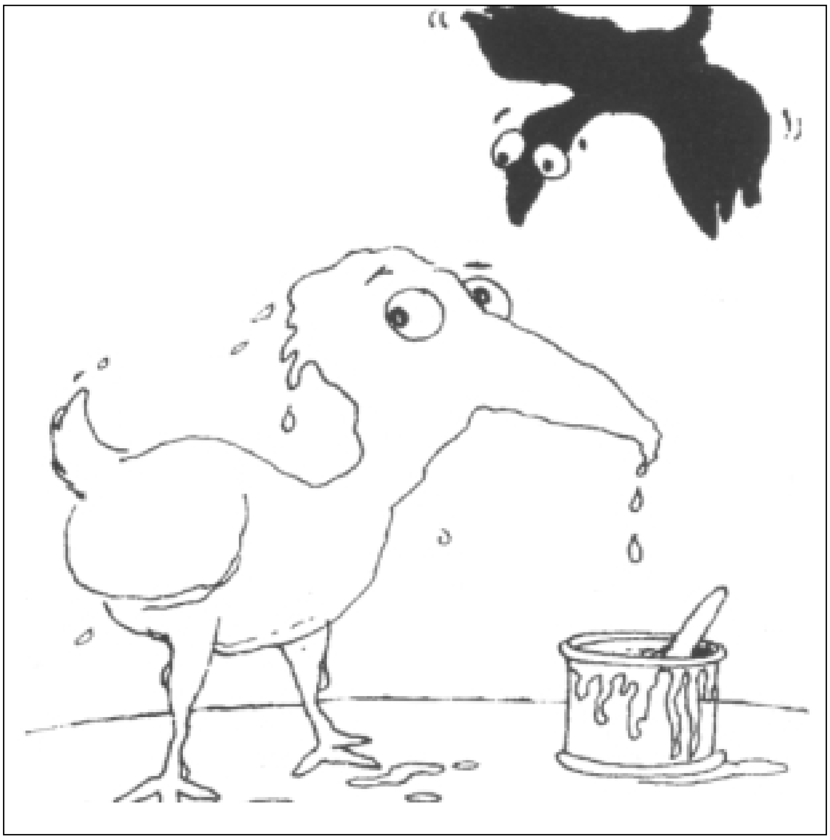
Auzia ebazteko, Russellek predikatu bakoitzari multzo bat zegokionaren ideia arbuiatu egin zuen. Berak, ondorio kontraesankorrak sortzen zituzten predikatuek ez zutela esanahirik zioen, multzorik ez bait zuten sortzen. Hots, multzo bat definitzeak ez du esan nahi multzoa existitzen denik. Honelatan, ezin da zirkulu-karratua definitu, kontzeptu kontraesankorrak bait dira. Russellen ebazpenak intuizioan errotutako multzo eta egiari buruzko kontzeptuak uztera behartzen gaitu.

Badago beste metodorik paradoxaren kontraesana ezabatzeko. Batek logika balioaniztunean, eta ez logika baliobikoan, oinarritutako multzo-teoria behar du. Sistema honetan ukapenak bere esanahia galtzen du. Beraz, bere buruaren elementu den eta, aldi berean, ez den multzoa onar daiteke.

Bele guztiak al dira beltzak?

Beleen kaiolaren aurrean daudela, ornitologo batek hau dio:

- Hona hemen, bizitza osoan ikusi ditudan bele ederrenetako bi. Ikusi beren luma beltzak. Horiei zor diete duten izena.
  Hegazti hauen ohiturak azaldu eta gero, gazte batek honakoa galdetu dio:
- Barka irakasle, baina bele guztiak beltzak direla al diozu?
- Ez dakit hitz horiek esan ditudan, baina hala da. Bele guztiak beltzak dira.
- Nola egon daiteke hain ziur?
- Beno, nere bizitzan ehundaka bele ikusi dut eta guztiak beltzak ziren.
- Ados, baina ehundaka batzuk ez dira guztiak. Zenbat bele dago zure iritziz?
- Zenbait milioi. Zure galderara bueltatuz, pertsona askok, zientzilariek eta zientzilari ez direnek, milaka urtetan zehar aztertu ditu beleak, eta bat berak ere, nik dakidala, ez du aipatzen beltza ez den belerik.
- Beraz ezin da guztiez mintzatu, ia bele guztiez baizik.
- Horixe, baina proba gehiago badago. Pentsa, esate baterako, kolore askotako hegazti polit horietaz, loroak, tukanak, indioilarrak, ...
- Bai, ederrak dira, baina ez dakit bele guztiak beltzak direneko baieztapenarekin zerikusirik daukaten.
- Benetan, ez al duzu ulertzen?
- Ez. Azalduko al zenidake?
- Ongi. Onartzen al duzu ale beltz bakoitzak orokorpena baieztatu egiten duela?
- Jakina.
- Ongi. Ba, "bele guztiak beltzak dira" enuntziatua, logikaren ikuspuntutik, "gauza ez-beltz guztiak ez-bele dira" enuntziatuaren baliokidea da. Hau honela izanik, eta enuntziatu bat baieztatzen duen kasu orok bere baliokideak ere baieztatzen dituela kontutan hartuz, ez-bele ez-beltz orok bele guztiak beltzak direnekoa baieztatzen du. Beraz, kolore anitzeko hegazti eder hauek, ez bele ezta beltz ere ez direnek, ere baieztatzen dute.
- Hori absurdua da —erantzun zion gazteak—. Erizpide horrekin, zure jaka urdin eta fraka grisek ere baieztatzen dute bele guztiak beltzak direna. Izan ere, ez bait dira bele eta beltzak.
- Bai horixe —dio ornitologoak—. Zientzilariak bezala arrazoitzen ikasten ari zarela dakusat.



Beleen paradoxak polemika handia sortu zuen zientzi filosofoen artean 1940.eko hamarkadaren erdian, Carl Hempel logiko alemanak *Studies in the Logic of Confirmation* lanean azaldu zuenean. Beleen paradoxa, baieztapenarena, logika induktiboarena da. Hortaz, ez da egiazko premisetatik ateratako ondorio logikoa. Arazo hau paradoxikoa da, logika induktiboaren bi printzipio (baieztapenarena eta baliokidetasunarena) intuizioaren kontrako ondorio logikoetara eratortzen bait dira.

Badirudi logika induktiboa, “bele guztiak beltzak dira” bezalako orokorpenak kasuen bidez baieztatzen direneko printzipioan oinarritzen dela, hau da, bele beltz bakoitzak berronesten du orokorpena. Logika induktiboak ez du ziurtasuna onartzen. Orokorpena hainbeste probak berronesten duela soilik esan daiteke. Aitzitik, beltza ez den bele bakar bat nahikoa da orokorpena errefusatzeko.

Baieztapenaren printzipioa ezezik baliokidetasunarena ere eztabaidatzen du. Bi enuntziatu baliokide dira, baldin eta soilik baldin bat egiazkoa denean bestea ere bada eta bat faltsua denean bestea ere bada. Beraz, egibalio bera daukatenean. Hortaz, bi enuntziatu baliokidek egibalio bera badaukate, bat baieztatzen duen kasu batek bestea ere baieztatzen du. Halaber, kasu batek bat errefusatzekotan, biak batera errefusatuko ditu.

Hempelek paradoxa orokorpen unibertsalen hedapena gaizki interpretatzeagatik sortzen dela dio. Berak onartzen du “bele guztiak beltzak dira” orokorpena uso zuriak, ortzadarrak eta abarrek baieztatzen dutela. Lengoaia arruntean hedapena orokorpenen subjektu gramatikaletara (belea, belztasuna) mugatzen da. Logika-ikuspuntutik, aldiz, bere hedapena mugagabea da, hots, dena hartzen du (bele, beltz ez dena ere bai). Hempelen ustez, “bele guztiak beltzak dira” orokorpenaren baieztapen bezala ez-beleak onartzeko oztopoa, orokorpenak aurretiko ezagumenduen arabera interpretatzea da. Hau dela eta, intuizioak uso zuri, ortzadar eta abarren existentziak beleen koloreei buruzko orokorpenarekin ez duela zerikusirik esaten digu, baina logikak intuizioa oker dagoela frogatzen du.

Filosofo batzuk, ez-bele ez-beltzen kasuek orokorpena maila desberdinetan baieztatzen dutela frogatzen saiatu dira. Ideia hauen abiapuntua beleen kopurua ez-beleena eta gauza ez-beltzena baino txikiagoa izatea da. Teoria honen arabera hiru metodo daude baieztapen handiena lortzeko: bele guztiak aztertzea (guztiak beltzak direla frogatu arte); gauza ez-beltz guztiak aztertzea eta bat ere bele ez dela determinatzea; edo, azkenik, gauza guztiak aztertzea eta bele ez-beltzik ez dagoela determinatzea. Itxuraz, zentzuzkoena beleak aztertzea da. Zilegizko dirudi bele beltz bat ikusteak pisu handiago duela esatea; proportzioan, beleen artean bele beltz batek pisu handiagoa bait du, ez-bele ez-beltzen artean uso zuri batek baino.