ERAGIKETAK NOLA? (I)

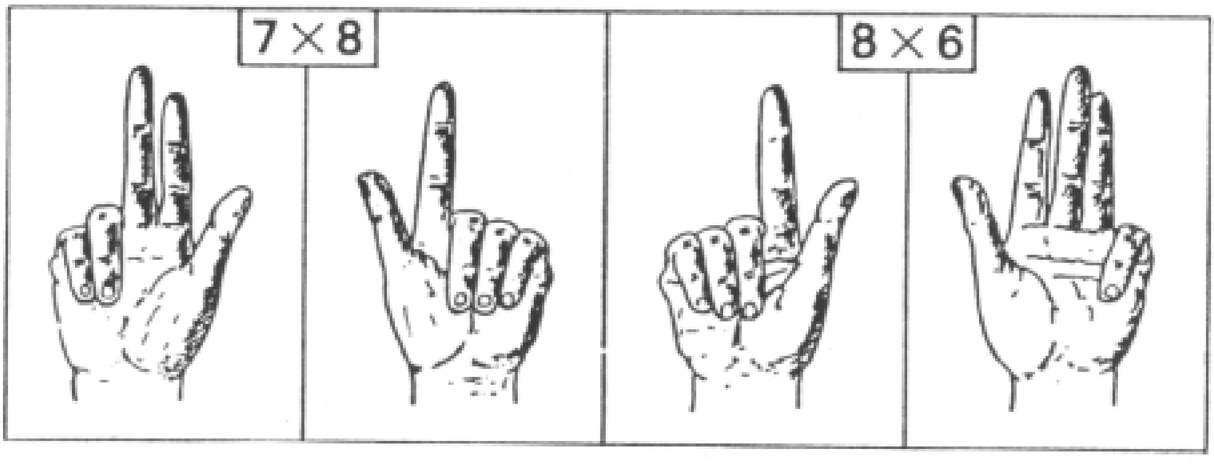
BATUKETA ETA KENKETA

Patxi Angulo

AURREKO aleetan zifren historian murgildu ginen. Bertan, gizakiak erabilitako sistemak ikusi genituen. Zifrak asmatzera bultzatu zuena zenbatu beharra izan zen (eta zenbaketari loturik azaltzen ziren eragiketak ere bai). Baina, gure sistema agertu arte nola konpontzen ote ziren eragiketak egiteko? Galdera honi buruz arituko da artikulu hau. Aurkitu diren aztarnei esker gizakiak nola kalkulatu izan duen esan dezakegu gutxi gorabehera.

Zenbakiak asmatzera bultzatu zuena, esan bezala, zenbatu beharra izan zen. Zenbaketa gorputzaz baliatuz egiten zuten. Kasu batzuetan eskuaz gain gorputzaren beste atal batzuk (oinak, besoak, aurpegia, ...) erabiltzen baziren ere, gizakiaren lehenengo kalkulagailua eskua izan zela esan daiteke. Eskuak, seguru asko, hamar, bost, hamabi eta hogei oinarriak sortu zituen. Eskuz zenbatu ezezik eragiketak ere burutzen zituen gizakiak. Garai hartan, gizakiak zenbaki kontzeptua ez zuela ulertzen eta ez zuela zenbaki idatzirik ezagutzen gogoratu behar dugu. Hala ere, zenbait biderkaketa egiteko gai zen.

Esate baterako, 5 eta 10aren arteko bi zenbaki biderkatzeko, esku batean biderkagai bat eta 5en arteko diferentzia adina hatz jaisten zuten; beste eskuan, ordea, biderkagaia eta 5en artekoa. Emaitza, bi eskuetan jaitsitako hatz-kopurua bider hamar (buruz) eta bi eskuetan jaitsi gabeko hatz-kopuruen biderkadurari batuz lortzen zuten (1. irudia).



7 x 8 biderkaketa

Jaitsi: (7–5) hatz esku batean, eta (8–5) hatz bestean

Emaitza: guztira 5 hatz jaitsiak 3 hatz altxatu esku batean eta 2 bestean

Hortaz, 7 x 8 = 5 x 10 + 3 x 2 = 56

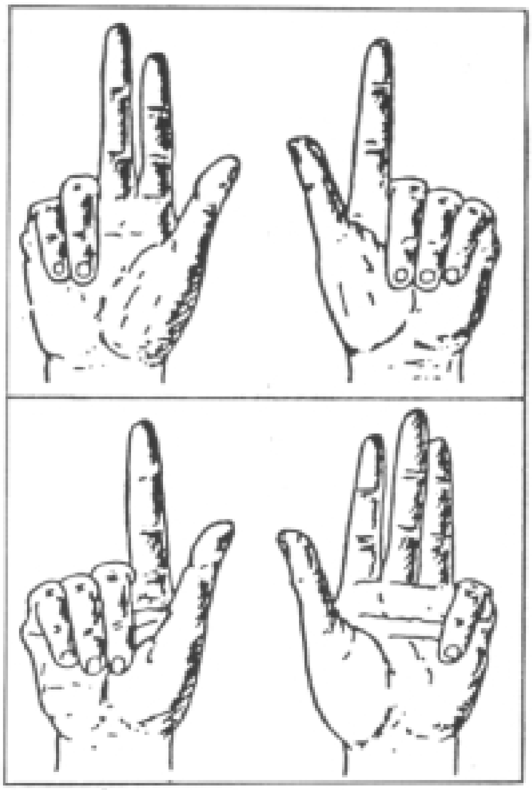
8 x 6 biderkaketa

Jaitsi: (8–5) hatz esku batean, eta (6–5) hatz bestean

Emaitza: guztira 4 hatz jaitsiak 2 hatz altxatu esku batean eta 4 bestean

Hortaz, 8 x 6 = 4 x 10 + 2 x 4 = 48

1. irudia.



10 eta 15en arteko zenbakien biderkaketa
(100, 10aren karratua, ezagutu behar da)

Adibidea: 12 x 13

Makurtu: (12–10) hatz esku batean eta (13–10) hatz bestean

Emaitza: 2 hatz makurtu esku batean eta 3 hatz makurtu bestean

Hortaz, 12 x 13 = 10 x (2+3) + (2x3) + 10 x 10 = 156

15 eta 20ren arteko zenbakien biderkaketa
(225, 15aren karratua, ezagutu behar da)

Adibidea: 18 x 16

Makurtu: (18–15) hatz esku batean eta (16–15) hatz bestean

Emaitza: 3 hatz makurtu esku batean eta hatz bat bestean

Hortaz, 18 x 16 = 15 x (3+1) + (3x1) + 15 x 15 = 288

2. irudia.

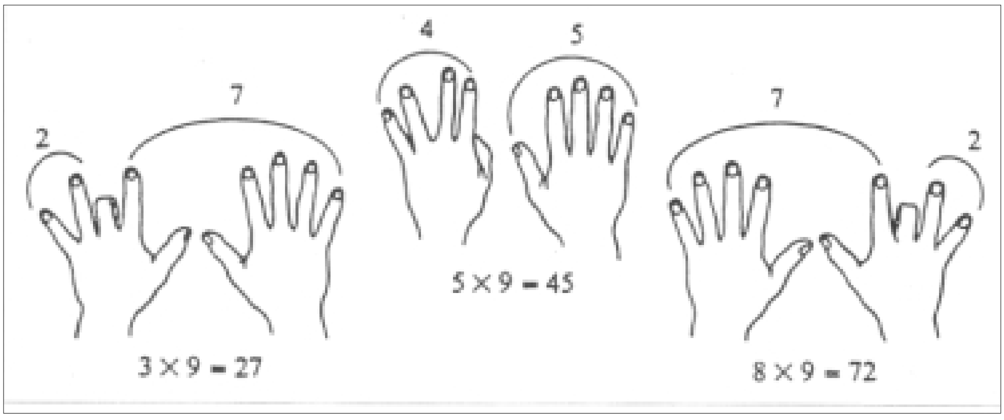
Honek bere egiaztapen matematikoa dauka: x eta y 5 eta 10aren arteko zenbakiak badira, esku batean (x-5) hatz eta bestean (y-5) hatz jaisten dira eta jaitsi gabe, lehenengoan 5 - (x-5) eta bigarrenean 5 - (y-5) dago, jaitsitako hatz-kopurua (x-5) + (y-5) delarik. Aipatutako eragiketak eginez gero $10\,[(x-5) + (y-5)] + [5 - (x-5)]\,.\,[5 - (y-5)] = 10\,(x+y-10) + (10-x)\,.\,(10-y) = 10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + xy = xy$ daukagu.

Antzeko erregelaz baliatzen ziren 10 eta 15en arteko bi zenbaki biderkatzeko edo 15 eta 20ren arteko beste bi, eta abar.

10 eta 15en arteko bi zenbaki biderkatzeko, esku bakoitzean biderkagai bat eta 10en arteko diferentzia adina hatz makurtzen zuten; makurtutako hatzen kopurua 10az biderkatzen zuten buruz; gero bi eskuetan jaitsitako hatz-kopuruak biderkatu eta azkenik bi emaitza horiek eta 100 batzen zituzten (2. irudia).

Maina guzti hauek badaukate bere egiaztapen matematikoa, nahiz eta orduko gizakiak ulertu ez.

Bitxikeria gisa 9 zenbakiaren biderkaketa-taula eskuz emango dugu. Bi eskuak gure aurrean zabalduz, ezkerretik eskuinera, hatzei 1, 2, 3, ... balioak eman eta gero, biderkagaitzat 9 duen biderkadura kalkulatzeko beste biderkagaiak adierazten duen zenbakiari dagokion hatza makurtu eta emaitza hatz horren alde bakoitzean geratzen diren hatz-kopuruek emango digute; ezker aldekoak hamarrekoak eta eskuinaldekoak unitateak (3. irudia).

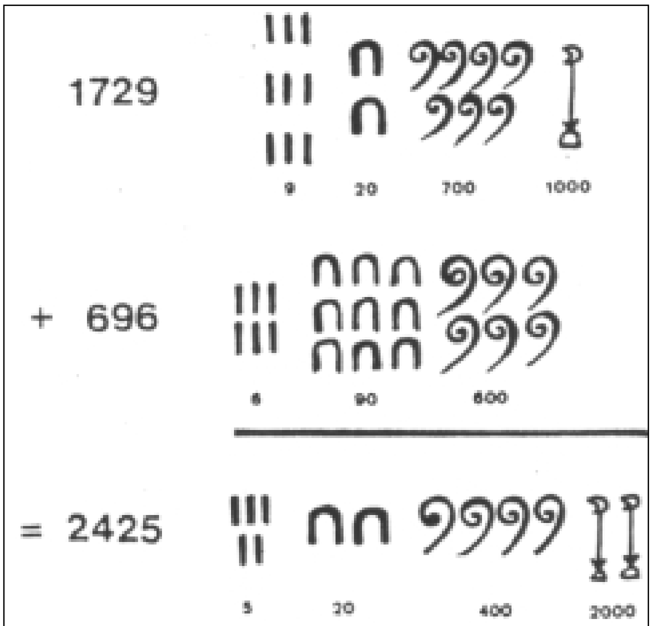


3. irudia.

Baina goazen orain, lehenengo eragiketa idatziak ikustera. Hasi baino lehen, ordukoak ez eta gaurko zifrak erabiliko ditugula argituko dugu.

Batuketa

Dudarik gabe eragiketarik errazena da; bai teorian bai praktikan. Eragiketa honen historian zeharreko zenbait adibide ikusiko dugu.



4. irudia.

Egyptiarrek bi zenbaki batzeko, 1729 eta 696 esate baterako, batabestearen gainean idazten zituzten (4. irudia). Gero ikur berdinak bildu eta ordena bateko 10 ikur hurrengo ordenako ikur batez ordeztuz lortzen zuten emaitza.

Beste adibide bat abakoaren eskutik dator. Abakoan, bi zenbaki batzeko biak uharrien bidez idazten ziren, batabestearen atzetik, eta beharrezko laburpenak egin eta gero agertzen zen emaitza. Abako berezi bat, harean zutabeen bidez egindakoa, erabili zuten kalkuluan iaioak ziren hinduek. Zutabe bakoitzean zenbaki bat idazten zuten; zero edo ordena eza adierazteko zutabea hutsik uzten zutelarik. Batuketa beste abakoan bezala burutzen zuten, baina uharrien ordez zenbakiak erabiliz. Hemendik dator, hain zuzen ere, guk orain erabiltzen dugun algoritmoa.

Hala ere, hinduek beste algoritmo bat, atzerakoi izenekoa, bazeukaten. Hau (ezkerretik hasita zutabeka batzen ziren zenbakiak) *bururakoak* zeudenean ezabatzean zetzan (5. irudia).

3746		**3746**	
578		**578**	
<u>1374</u>		**<u>1374</u>**	
4588	**1)**	**4**	**1 + 3 = 4; idatzi 4**
569	**2)**	**~~1~~5**	**7 + 5 + 3 = 15; idatzi 15 eta**
	3)	**5**	**ordeztu 4 eta 1, 4 + 1 = 5az**
	4)	**~~1~~8**	**7 + 7 + 4 = 18; idatzi 18**
	5)	**6**	**ordeztu 5 eta 1, 5 + 1 = 6az**
	6)	**~~1~~8**	**6 + 8 + 4 = 18; idatzi 18**
	7)	**9**	**ordeztu 8 eta 1, 8 + 1 = 9az**

Batura 5698 da.

5. irudia.

XVI. mendean, 1540an, Gemma Frisius-ek algoritmo bat sortu zuen. Zenbakiak handienetik txikienera eta goitik behera idazten zituen eta zutabe bakoitzeko zenbakiak batzen zituen. Honela lortutako emaitza partzialak eskuinetik ezkerrera idatzi eta gero batu egiten zituen (6. irudia).

3764
987
<u>415</u>
16
15
20
<u>3</u>
5166

6. irudia.

Ikus dezakezunez algoritmo ezberdinen arteko diferentziarik handiena emaitzen adierazpenean zegoen.

Kenketa

Eragiketa hau interesgarri egiten duena kentzailea kenkizuna baino handiagoa deneko kasua da, baina ez gara horretan sartuko. Kenketaren algoritmoa ez zegoen estandarizatua. Metodo ugari dago eragiketa hau burutzeko. Prestamen-eskaeraren ideia zaharra eta zabaldua da ordea. Metodo, edo ideia, hori erabili zuen Fibonacci-k (Pisako Leonardo) 1202an.

Hala ere, hona prestamena eskatzeari ekiditen dion Columbia algoritmoa ekarriko dugu. Hurrengo adibidean ikusten da 8432 - 5976 kendura Columbia algoritmoaren arabera nola kalkula daitekeen:

		3
1. urratsa:	**8 – 5 = 3; 5 eta 8 ezabatu**	**~~8~~432**
	8ren gainean 3 idatzi	**~~5~~976**
		2
		~~3~~5
2. urratsa:	**34 – 9 = 25; 3, 4 eta 9 ezabatu**	**~~84~~32**
	3ren gainean 2 eta 4ren gainean 5 idatzi	**~~59~~76**
		24
		~~35~~6
3. urratsa:	**53 – 7 = 46; 5, 3 eta 7 ezabatu**	**~~843~~2**
	5en gainean 4 eta 3ren gainean 6 idatzi	**~~597~~6**
		2456
		~~356~~
4. urratsa:	**62 – 6 = 56; 6, 2 eta 6 ezabatu**	**~~8432~~**
	6ren gainean 5 eta 2ren gainean 6 idatzi	**~~5976~~**

Kendura, beraz, 2456 da.