
ERRENAZIMENTUKO MATEMATIKA

L. Bandres Unanue

Errenazimentuaren sorreran greko klasikoan lanen latinerako itzulpenek berebiziko garrantzia izan zuten. Itzulpen hauek bi bide ezagutu zituzten. Alde batetik, mendebaldeko Erdi Aroko biltzaile latindarren lanak zeuden eta bestetik, arabiarrek eta pertsiarrek egindako Grezia Klasikoaren lanen itzulpenak. Lehenengo bideak, ezpairik gabe, askoz garrantzi txikiagoa du bigarrenak baino. Hala eta guztiz ere, kontutan hartu behar den zerbait da.



XIV. mendeko eskuskribu italiar baten miniatura. Neurtzeko moduak azaltzen ditu.

ERRENAZIMEN-
TUAREN hasieran
matematikaren ar-
loan asko landu
zen atala aritmetika
izan zen. Lantze
honetan Erdi Aroko bildumak izan
ziren oinarria. Matematikaren be-
netako garapena, hots, logikoki era-
tutako proposizioen bitartez deduk-
zio-bidez eraikitako sistema, Erdi
Aroan zehar desagertu egin zen, eta
matematika merkatal trukeetarako
behar ziren kalkuluak egiteko,
lurren neurketarako eta antzeko
eginkizunetan baino ez zen erabil-
tzen. Baina, XIV. mendean merka-
tal bizitzak ezagutu zuen gorakada
dela eta, kalkuluak beste sakontasun
bat eskatzen zuen eta horretarako
Erdi Aroko bildumak berriro ere
eskuratu, ikertu eta sakondu egin
behar izan zituzten.

Ospe handieneko biltzaile latin-
darra Boecio (475-524) dugu. Ho-
nek, Ptolomeo, Euklides eta Ale-
xandriako Nikomakoren lanetan
oinarritutako astronomia, geome-
tria, aritmetika eta musikari buruz-
ko tratatu erraz batzuk idatzi zi-
tuen. Baina, hauek baino garrantzi
handiagoa Aristotelesen logikari
buruzko idazkien bere itzulpenak
du. Gogoan eduki behar den beste
biltzailea Kasiodoro (~ 490-580)
da. Sevillako San Isidororen (570-
636) "Etimologietan" zenbait
kontzeptu matematikoren defini-
zioak aurki daitezke, hauekin
batera Veda Beneragarria (673-
735) eta York-eko Alcuinus aipatu
behar ditugu. XII. mendearen erdi
aldean Europako zenbait kate-
dralekin uztartuta zeuden eskoletan
"quadrivium" izeneko egitasmoan
(geometria, astronomia, aritmetika
eta musika) aipatutako biltzaile
hauen lanak hartzen ziren testutzat.

Baina, lehen aipatu dugun beza-
la, matematikaren garapenean bide
honek ez du horrenbesteko garran-
tzirik; bigarrenak, baizik. Pentsa-
kera zientifikoari arabiarrek egin
zioten mesede oparoena, zientzia

greko klasikoaren berreskuratze eta
transmisioa izan zen, eta nahiz eta
bere emaitza originala urria izan,
zientziaren aurrean zeukaten jarrera
laiko eta irekia (mendebaldean ze-
goenarekin alderatuz) aurrerapauso
handia izan zen.

Arabiarrek zientzia greko klasi-
koa bi iturritatik edan zuten: alde
batetik, Bizantzioko grekoen iturria
dugu eta bestetik Pertiako ekial-
dean kokatuta zeuden kristau nesto-
riarren. Nahiz eta latinera itzuli
eta kontserbatzen diren arabiarren
zientzilanak XII. mendekoak izan,
IX. menderako zenbait itzulpen
egon bazegoela dakigu. Azkeneko
mende honetatik aurrera Europa
kristauaren eta Islamaren arteko
merkatal erlazioak ugaltu egin
ziren eta baita gainerako erlazioak
ere. Horrela, itzulpen arabiarrek be-
ren bidea aurkitu zuten mendebal-
dera sartzeko. Sizilia eta Toledo
bihurtu ziren itzultzaileen kabia.
Zer esanik ez, itzulpen hauek ara-

bieratik latinera egiten ziren. Baina
XII. mendean hasi ziren itzulpen
zuzenak egiten, hau da, grekotik
latinera. Urtetik urtera bide hau
lehenasuna hartuz joan zen eta
XIV. mendearen hasierarako itzul-
pen arabiarrek oso gutxi erabiltzen
ziren.

Matematikaren arloan arabia-
rrek mendebaldeari transmititu zio-
tena zientzia grekoak zuena baino
askoz oparagoa zen. Aberastasun
hau ez dagokio arabiarrek egindako
lan originalari; hinduen matemati-
kaz egin zuten asimilazioari baino.
Hinduek aritmetika eta algebraren
esparruan aurrerapen handiak lortu
izan zituzten: erro karratuak eta ku-
bikoak ezagutzen zituzten, segida
aritmetiko nahiz geometrikoen ba-
tuketak egiteko bideak jarrita zeuk-
katen, lehenengo eta bigarren mai-
lako ekuazioak ebazteko metodoak
bazituzten eta sinuaren taula trigo-
nometrikoa egin zeukaten. Hala
ere, zientziari egin zioten oparirik

*Euklidesen
"Elementuak"
lanaren
latinezko
bertsioa*





*Boecio-ren
"Aritmetika"
lanaren XV.
mendeko
argitalpena*

handiena beren zenbaki-sistema izan zen, hau da, orain erabiltzen dugun sistema posizionala eta honetan toki berezia merezi du zeroaren asmakuntzak. Sistema honen lehenengo adierazpen osoa IX. mendean Al-Khwarizmi izeneko matematikari arabiarrek egin zuen. Mendebaldean sistema honen hedapena oso geldia izan zen eta nahiz eta XII. mendean hasi XVI. mendean (Italian izan ezik) gainerako lurraldeetan sistema erromatarra asko erabiltzen zen. Hala ere, XIV. mendetik aurrera matematikarien artean sistema hindu-arabiarra nagusitu egin zela esan daiteke.

Garai horretako matematikaren garapena Mendebaldean hiru urratsetan burutu zen. Hasierakoari "lehenengo Errenazimentua" esan diezaiokegu; XIII eta XIV. mendeetan gertatu zen eta matematika klasikoaren berreskurapena zen bere lorpen nagusia. Honek Parisen izan zuen bere kabia berezia. Bere

pertsona aipatuena Pisa-ko Leonardo da eta bere arlo nagusia aritmetika edo kalkulu-bidea ziren. Bigarren aldean XV. mendean daukagu. Honetan matematikaren kimu berri batek loratzea lortu zuen, hots, algebra eta bere gailurra Luca Pacioli-ren "Summa" izeneko lana argitaratu zen 1494ean. Hemendik aurrera matematikaren garapena ildo aritmetiko-algebraikoari jarraituko zaio eta honekin hirugarren aroan gaude, hots, Errenazimentuan bete-betean.

Esana dagoenez, garai honetako matematikaren adar nagusia aritmetiko-algebraikoa zen, baina bai geometriaren nahiz trigonometriaren aurrerapausoak eman zirela ere aitortu behar dugu. Egia esan, geometriaren arloan garrantzizko aurrerapen teorikorik ez zen gertatu, baina arkitektoek, margolariak, etab.ek egin zituzten lanak kontutan hartzekoak dira. Garai honetako oso berezitasun garrantzitsua izpiri-

tu zientifiko-teknikoaren garapena da. Beraz, edozein jakintza-arlotako aurrerapen praktikoek beren alderdi tekniko hutsa baino zerbait gehiago adierazten zuten.

Beste aldetik, trigonometriak garai honetan aurrerapen handia lortzeaz gain bere autonomia osoa erdietsi zuen. Horrela, aldi hartako hasieran astronomiaren mirabe baino ez zen hura, bukaeran bere buruaren jabe izango da.

Hori dela eta, hurrengo urteetan izango duen garapen teorikoari atea ireki zitzaion.

Viète-ren bizitza XVI. mendean bukatu zen, baina bere lanean algebra sinbolikora iragateko eman behar zen jauziaren oinarria aurkitzen da. Honekin matematikaren historian garrantzi handiko aro bat itxi zen. Ia berehala fisika berriaren bultzada dela eta, matematikaren arloan kalkulu infinitesimalak hartuko zuen lehentasuna. Etapa bat amaitutzat jo dezakegu. Bere emaitzak hurrengo mendean hasiko ziren loratzen, hau da, gaur egun Zientzia Moderno edo XVII. mendeko Iraultza Zientifiko bezala ezagutzen den hasierarekin.

Matematikaren irakaskuntza

XII. mendera arte mundu intelektuala monastegietan zegoen giltzaperatuta. Egoera hau, esandako mendean eta Unibertsitateen sorrerarekin hasi zen birrintzen. Besteak beste, hor ditugu Parisekoa (1160), Boloniakoa (1160), Oxfordekoa (1167), Paduakoa (1222), Salamancakoa (1227), Krakoviakoa (1364) eta Viennakoa (1367). Irakaskuntza unibertsitarioaren oinarria zazpi arte liberalak ziren eta zientziari dago-kionez "quadrivium" a zen biltokia. Nahiz eta hasieran unibertsitateak mundu intelektualarentzat oso lagungarriak izan, Behe-Erdi Arora iristean tradizio aristoteliko-kristauaren defentsaren gaztelu bihurtu ziren heinean, garapen zientifikoei kalte baino ez zieten egin.

Unibertsitateetan erakusten zen matematikaren maila oso apala zen eta egoera hartan iraungo zuen XV. mendearen bukaera arte. Berez, XIII, XIV eta XV. mendeetan matematikaren arloan emandako aurrepausoak unibertsitateetatik kanpo egin ziren. Honela, XV. mendearen bigarren erdian matematika irakasten zuten unibertsitateak Bolonia eta Krakoviakoa baino ez ziren, eta hauetan astronomiari eta astrologiari laguntza emategatik irakasten zen. Mendearen aldaketarekin batera, egoera ere erabat aldatuko zen. XVI. mendean matematikako katedrak unibertsitate guztietan hasiko dira loratzen.

Matematikaren garapenean (eta ez matematikarenean soilik) garrantzi berezia izan zuen liburuen inprimaketak. Horrek, besteak beste, sinbolismo bakarra eta sinpleena sortu eta onarterazi zuen eta, denok dakigun bezala, hori matematikaren garapenerako behar-

beharrezkoa da. Hasiara honetan, lehenengo lana idazki klasikoak argitaratzea izan zen. Horrela 1472. urtean Sevillako Isidororen "Etimologiak" eta Sacrobosco-ren "Sphaera" inprimatuko dira, 1478an Boecioren "Aritmetika" ikusiko du argia (honek mende batean hogeitabost argitalpen baino gehiago izan zituen) eta 1488an Sacroboscoren "Algorismus" ari egokituko zitzaion txanda, esaterako. Hemendik aurrera, Euklidenen nahiz Arkimedesen, Apolonioren edo Diofantoren lanak argitaratuko dira eta hauekin batera beste hainbat eta hainbat lan klasiko ere bai. Gainera, ez latinez bakarrik, bai eta herri-hizkuntzetan ere.

Beraz, unibertsitateak bere katedrekin, alde batera eta bestera azpiegitura bibliografikoak zutabeak ipinita zeuzkan XVI. mendean matematikaren irakaskuntzaren garapenerako.

Algebra kalkulurantz

XIII. mendean merkatalgoak eta bankak izan zuten zabalkuntza (Italian, batez ere) dela eta, erabilpen praktikoa helburutzat zeukaten lan matematiko batzuk idatzi eta argitaratu ziren. Horrela XVI. mendean aritmetika praktikoa Urrezko Arora iritsi zela esan daiteke.

Inprimatu zen lehenengo aritmetika praktikoa Treviso-n argitaratu zen 1478an eta bere egilea zein zen ez dakigu. Bertan, besteak beste, oinarrizko lau eragiketak (batuketak eta kenketak laburki, biderketak eta zatiketak zabalago eta bide desberdinez; ez dezagun ahantz Errenazimentuan zehar azken eragiketa hauen ebazpenak bere zailtasuna zuela), hiruko erregela ("regola de tre cose"), etab. aurkitzen dira. Hamar urte geroago askoz aberatsagoa den Pietro Borghi-k argitaratuko du bere lana Venezian. Italiatik joera hau Alemaniara pasatuko da bereziki, bertan hainbat liburu argitaratuz.

Urte haietan matematikaren sortze-lanerako behar-beharrezkoa zen lanabes baten bilketarako lehen urratsak eman ziren, hau da, formalismo abstraktu baten eraikuntzarako lehen urratsak. Bere bidez termino nahiz eragiketak sinbologia jeneriko eta sinple batez adieraziko lirakeke matematika hedatzea nahiz sakontzea erraztuz. Matematikak ideien gainetik eraikitzen ditu ereduak eta horregatik dauka hostoak kenduz zuzen-zuzenean mamira joateko kodigo sinboliko baten beharra.

Arlo honetan garrantzi handia dauka zenbakien idazketaren arazoak. Alde batetik, abakozaleak dauzkagu. Hauek zenbakiak erromatar eran idaztearen alde zeuden eta XVII. mendearen erdira arte, bankarien eta merkatarien artean batez ere, hauek zirela nagusi esan behar dugu. Hauek beren eragiketak egiteko abakoak erabiltzen zi-



Pacioli-ren "Summa" liburuaren azala

tuzten eta honi buruz abakoak gaur arte Errusian eta Asian erabili izan direla gogoratu behar dugu.

Hauen aurrean algoritmozale izenda ditzakegunak dauzkagu. Hauek zenbakiak arabiar eran idazten zituzten. Hasieran idazkera hau unibertitateetan baino ez zen erabiltzen eta bere hedapen-prozesua gelditu eta neketsua izan zen. Idazkera berri hau duen kalkulurako liburua inportanteenetakoa, lehen aipatu dugun Sacroboscoren “Algorismus” (1488) izenekoa da. Baina, matematika zientzia teoriko bezala lantzen zuten artean aukera egina zegoen, Errenazimentuan. Beraz, arabiar zenbakiak lortu zuten beren garrantzia.

Trevisoko “Aritmetika” argitaratu eta hamabost urte barru Luca Pacioli-ren “Summa” izeneko lan ikaragarria agertu zen. Luca Pacioli frantziskotarra, Perusa eta Erromako irakasle izan zen eta 1494ean “Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita” izeneko liburua argitaratu zuen Venezian. Lan honek bost atal dauzka eta hauetako bakoitza azpiatal desberdinetan banatuta dago. Testuaren gunea aritmetika eta algebrari dagokie. “Summa”ren lehenengo atalean aritmetika aztertzen da: zenbakien sailkapen pitagorikoa eta poliedro erregularren ohizko teoria. Gero, oinarritzko eragiketa aritmetikoak azalduko ditu, batuketak (metodo batez), kenketak (hiru metodoz), biderkaketa (zortzi metodoz), zatiketak (lau metodoz), progresio aritmetikoen kalkuluak, erro karratuak eta kubikoak, eta berreketa. Aurreraxeago zatikiak ikertuko ditu eta horrela bukatzen da aritmetikari dagokiona.

Algebrearekin hasterakoan oinarritzko eragiketak eta berdinketa adierazteko ikurrak gogoratzeko arau mnemoteknikoak ematen ditu. Horrela, eguneroko kalkuluetan eta “arte maggiore”an erabili behar di-

renen artean (hauek berak “caratteri algebrici” izendatuko ditu) bereizketa egiten du.

Ekuzioen teorian lehenengo eta bigarren mailakoak aztertuko ditu. Maila handiagokoak orokorrean algebraren bitartez ez dagoela ebazterik esango du (zenbait urte geroago Tartaglia, Cardano eta beste matematikariek ebatziko zituzten). Laugarren atalean partida bikoitzeko kontabilitatea eta moneta- eta neurri-taulak emango dizkigu, bostgarrenean geometriaz arduratzen delarik.

XVI. mendean zehar, algebraren garapena bi ildotatik doa aurrera. Batetik, sinbologia erraz eta ba-

tutzailea eraikitzearena dugu eta bestetik, garrantzi handiko problemak ebaztearena, hala nola, hirugarren eta laugarren mailako ekuzioak eta bide batez zientzia formal bat eraikitzearena. Lehenengo ildoan matematikari alemanek hartuko dute bereziki. Bigarrena, aldiz, italiarrek. Bi bide hauen uztarketa, hau da, sinbologia erraz eta kementsu baten bidez partikularretik orokorrera iragatea argi eta aise lortzea, S. Stevin (1548-1620) holandarrak eta F. Viète (1540-1603) frantsesak lortuko dute. Bi zientzialari hauek ohizko italiar eta alemaniar eskoletatik kanpo kokatzen dira.



Pacioli

Simon Stevin edo Brujas-eko Simon, Errenazimentuaren bukaerako injineru-zientzilari horietako bat dugu. Arazo praktikoak ebazteko izugarritzko kemena izateaz gain bere ahalmenak alor teorikora pasarazi zituen. Gotorleku eta kaien eraikuntzaz arduratu bazen ere, geometria, estatika, hidrostatika, kontabilitatea, aritmetika eta algebra ez zituen baztertu. Matematikari buruzko bere bi lan oparoenak 1585ean argitaratu ziren Leiden izeneko hirian. Beren izenak “De Thiende” eta “L’Arithmetique et la Practique de la Arithmetique” dira.

Lehenengoa, Stevin-ek erabilpen praktikotarako idatzi zuen. Zatikiaz bera baino lehen ezagunak ziren arren, erabilpena oso murrizta zen eta inork ez zituen egitura baten barnean sartu. Stevinek zenbaki osoak gidatzen dituzten erregela matematikoak zatikiekin erabil ahal izateko, idazkera berri bat asmatu zuen. Hala ere, idazkera hau ez zen oso aproposa eta urte gutxi barru (1617an edo) Neper-ek gaur egun erabiltzen dugun zenbaki osoaren atzetik koma batez bereiztuta zati hamartarra idaztea proposatu zuen. Lan honetan egileak proposatutako pisuak, neurriak eta monetak sistema hamartarrean oinarritzeko sistemak, bi mende baino gehiago itxaron beharko zuen gorputz hartzeko.

“Arithmetique”n algebraren garrapenerako garrantzi handiko bi ideia plazaratzen ditu. Alde batetik, zenbakiaren kontzeptuaren bateraketa eta, honetan oinarrituta, ekuazio algebraikoen ebazte-erregelen bateraketa bestetik. Horrela, zenbakien teoriaren ikerketak zenbaki negatiboak erabat onartzea ekarriko du eta beraz, ekuazio algebraikoak ebazteko zegoen azpibanaketa ezabatuko du “erregela bakar bat” eskainiz. Hala ere, ekuazio kubiko eta bikarratuen kasuan ez zuen ahal zuena lortu, Bombellik (1572an edo) lehen aldiz adierazitako zenbaki irudikarien kontzeptua bereganatu ez zuelako.

François Viètek pentsakera ma-



Idazkera algebraiko sinkopatuaren adibidea. Boelliren "Algebra"koa

tematikoaren ikuspegiari izugarritzko aldaketa eman zion. Berak honakoa proposatu zuen: kalkuluak kantitate konkretuetan oinarritu beharrean, edozein kantitate adieraz dezaketen sinbolo edo ikurretan oinarritzea. Eta baita lortu ere. Horrela abstrakzio-mailan algebra aritmetika baino gorago jarri zuen eta trigonometria nahiz geometriaren arloetan algebra sistematikoki erabili zuen. Viète lanetan partikularretik orokorrera iragatea ez-pairik gabe ikusten da lehen aldiz.

Trigonometria

Alor honek matematikaren parte berezi bezala tratatu izatea, Errenazimentuan lortu zuen. Honen erantzulea Johannes Müller (1436-1476) (“Regiomontano” izenaz ezagunagoa) izan zen. Bere “De triangulis omnimodis libre quinque” lana nahiz eta 1465ean burutua izan, 1533ra arte ez zen argitaratu. Bost liburu hauek lehenengo biak trigonometria launari dagozkio eta beste hirurak esferikoari. Egia esateko, bere lana nahiz eta oso originala izan ez, bere alderdi sintetizatzaileak irekitzen

dituen ikerketa-bide berriak ez dira bazterrean uztekoak.

Honekin batera alor honetako beste izen batzuk Johannes Werner, (1528aren inguruan), Petrus Apianus (1495-1552), Gemma Frisius (1508-1555), Georg J. Rheticus (1514-1574) eta Willerbrord Snell (1581-1626) dira.

Geometria

Errenazimentuko Geometria praktikoa da bereziki. Bere langileak batez ere margolariak, arkitektoak eta artisauak izango dira. Matematika-liburu orokorretan oso orri gutxi izango ditu (gehienetan, azken partean jartzen diren problema batzuk) eta oso noizean behin dator adierazpen erdisistematiko bat edo beste. Euklides, Apolonio eta Arkimedesen lanen itzulpenak eta iruzkinak egiteko, XVI. mendean zehar gastatzen diren indarrak azken humanismo zientifikoaren esparruan gelditzen dira. Matematikaren arlo honek aurrejauzi sendo bat emateko, Fisika modernoak gorputzu beharko du, baina ordurako Errenazimentutzat ezagutzen duguna iragana zegoen. ●