ORRATZAK, π ZENBAKIA ETA KURBEN LUZERA

Jabier Duoandikoetxea

Luis Antonio Santaló Sors, Gironan jaio zen 1911n. Rey Pastor eta Blaschke-ren ikasle izanik, Madrilen egin zuen doktoregoa eta gerra-denboran Errepublikak Cartagenan zuen Eskola Aeronautikoan irakasle izan zen. Gerra ondoren Argentinara joan zen eta bertan gelditu, Rosario, La Plata eta Buenos Aires-en irakasle izanik. Urte haietan Argentinak matematikari-talde bikaina bildu zuen, nazioarteko mailan nabarmena, eta Santaló jauna talde horretako partaide garrantzitsua izan zen. 1983an "Príncipe de Asturias" saria jaso zuen. Joan den urrian, "Unión Matemática Argentina" delakoak antolaturiko matematikarien bileran amaiera-hitzaldia berak eman zuen, eta eskolako maisu-maistretatik Unibertsitateko irakasletaraino, maila desberdinetako entzulegoa liluratuta gelditu zen Santaló-ren maisutasunak eramandako bideetan. Ondoko lerroek hitzaldi haren zati bat isladatzen dute.

XVIII. mendean Buffon-eko kontea Pariseko Erret Loratategiaren arduraduna zen eta pixkanaka bere "Histoire Naturelle"ren hogeitamabi tomoak idatzi zituen. Historia horretan bizidun guztien bilketa sistematikoa egiteko asmoa zuen eta gizakiak ere bere lekua izan behar zuela uste zuen. Gizakien ezaugarri nagusia heriotzarekiko beldurra da Buffon-en eritziz, baina ez dakigu beste animaliek beldur hori ez dutela nola erabaki zuen. Bigarren ezaugarria, eta guri hemen axola zaiguna, jokoarenganako grina da eta horri eskaini zion "Essai d'Arithmétique morale" izeneko atala (1777).

Jokoetan dirua jokatzen zen, noski, eta jokoa garbia izan dadin irabazteko dugun probabilitatea ezagutu behar dugu. Adibide bat jartzeko, demagun dato bat botatzean "5" zenbakia agertzearen aldeko postura egiten dugula. Irabaziz gero, jokatutako dirua sei aldiz eman behar digute; probabilitatea 1/6 bait da. Aldiz, zenbaki bakoiti bat agertzearen alde postura eginez gero, jokatutako diruaren bikoitza baino ez dugu jasoko, orain probabilitatea 1/2 delako. Probabilitatea kalkulatzeko, kasu posibleak kontatzen ditugu (sei gure adibidean) eta aldekoak (bat "5"aren kasuan, hiru zenbaki bakoitiarenean), eta bigarren hau zati lehenengoa egiten dugu.

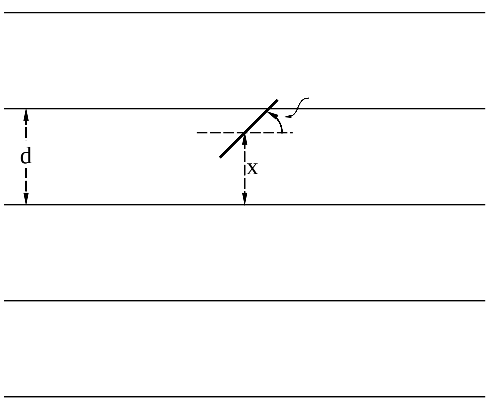
Buffon-ek joko geometriko bat proposatu zuen, non probabilitatearen kalkulua kasuak zenbatuz ezin egin zen. Hona zein den "Buffon-en orratzaren problema" deitzen duguna: egin ditzagun lurrean zuzen paralelo batzuk, elkarren arteko distantzia (d) finkatuz eta bota dezagun beraien artera l luzerako orratz bat, $l \leq d$ izanik. Orratzak lerro bat ebakiko duenaren alde postura egiten duenak, zenbat diru jaso behar du asmatuz gero? Gorago esan bezala, gertaera horren probabilitatea jakin behar dugu eta hain zuzen, $2l/\pi d$ ateratzen da (ikuserrekoadroa).

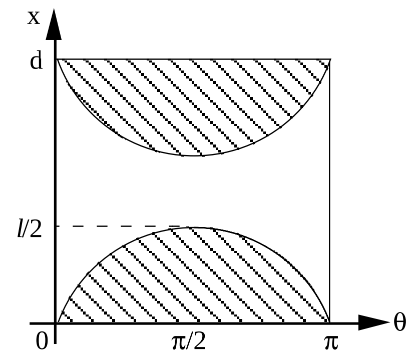
Buffon-eko kontea

Adibidez, lerroen arteko distantzia 5 cm-koa bada eta orratzak 3 cm neurtzen baditu, probabilitatea 0,38197 da eta jokatutako pezeta bakoitzeko 2,618 kobratu beharko lirateke asmatutakoan.

Ez dakigu joko hau txanponak irabazteko (ala galtzeko) inoiz erabili den, baina Laplace-k bere "*Théorie analytique des Probabilités*" (1812) liburuan aplikazio kurioso bat aurkitu zion; π zenbakiaren baliora hurbiltzearena alegia. Horretarako orratza lerro artera askotan bota ondoren, lerro bat ebakitzen duen aldien kopurua zati bota dugun aldi guztien kopurua, probabilitatearen balio hurbildua da, zenbat eta gehiagotan ari, hainbat eta fidagarriagoa delarik. Lortutako balioa berdin $2l/\pi d$ eginez, π aska daiteke.

Ikus dezagun orratzaren problemaren ebazpena; orratzaren posizioa finkatzeko bi aldagai nahikoa dira: erdiko puntua non dagoen eta orratzak horizontalarekin osatzen duen angelua, esate baterako. Lehen aldagaiari x deitu ahal diogu eta bi edozein lerro baliokide direnez, $0 \leq x < d$ hartuko dugu. Bigarrenari, θ deitu ahal diogu eta $0 \leq \theta < \pi$ dugu. Beheko lerroa ebakitzeko, $x - l/2 \ \sin\theta \leq 0$ izan behar du, eta goikoa ebakitzeko, $x + l/2 \ \sin\theta \geq d$. Irudian agertzen den laukizuzeneko puntu bakoitzari orratzaren posizio bat dagokio eta lerro bat ebakitzen denean puntuak marratutako eskualdean egon behar du. Ikusten dugunez, kasu posible guztien azalera πd da eta aldeko kasuena,





$$2\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\theta \, d\theta = 2l$$

Probabilitatea beraz $2l/\pi d$ da.

Irakurleari uzten diogu beste kasu batzuen azterketa. Hona hemen problema bat: demagun orratzaren luzerak $d < l \leq 2d$ betetzen duela; zein da lerro bat ebakitzeko probabilitatea? Zein, bi lerro ebakitzekoarena?

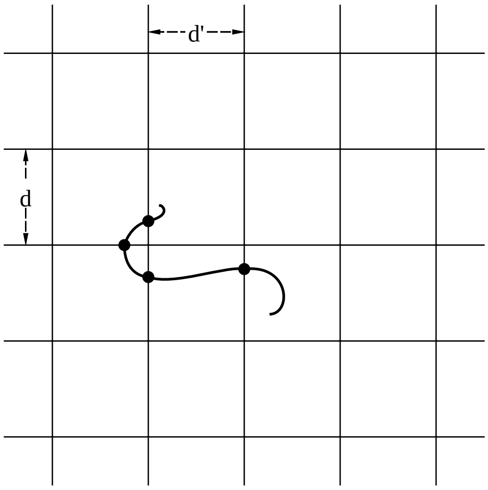
Literaturan agertzen diren emaitzak lar onak dira sinesgarriak izateko, baina kontutan hartu behar da esperimentua egiten ari zenak aldez aurretik bazekiela lortu nahi zuen emaitza eta komeni zitzaionean gelditu egiten zen. π-ren balioa benetan ezezaguna balitz, aipatzen diren 5000 inguruko jaurtiketekin bigarren dezimala zalantzazkoa litzateke.

Problema honen zenbait aldaketa proposa daiteke eta Laplace-k formulazio orokorragoa proposatu zuen: planoa orain laukitan banatzen da, zuzen paralelo horizontalak d distantziara eta bertikalak d' distantziara egonik eta beraien artera *l* luzerako hari bat botatzen da, edozein forma duelarik (ez derrigorrez zuzena orratzaren moduan). Hariak puntu batean baino gehiagotan ebaki dezake lerro-sarea eta ebaketa-puntuen kopuruaren esperantza matematikoa hau da:

$$E = \frac{2\,(d+d')\ l}{\pi d d'}$$

Hau da, N jaurtiketa egin ondoren ebaketa-puntuen batezbesteko kopurua E(N) bada, N infiniturantz doanean, E(N) goiko E-ren baliorantz doa. Ikus daitekeenez, d' infiniturantz doanean lehengo Buffon-en orratzaren emaitza ateratzen da. Eta berriro ere, d, d' eta *l* ezagutuz gero, π zenbakira hurbiltzeko erabil daiteke formula hori.

Bide hau π kalkulatzeko interesgarria ez bada, badago formulazio berri honetan benetan ezezaguna izan daitekeen balio bat; hariaren luzera hain zuzen. Eta badirudi praktikan ere erabilia izan dela. Mikroskopiotik begira ari bagara, baliteke bertan agertzen diren luzera batzuk ezin neurtu ahal izatea. Ezin dugu "haria" plano koadrikulatura bota, baina hona hemen zer egin dezakegun: mikroskopioaren irudiaren gainean sare koadrikulatu bat proiektatu (aldeak ezagunak izanik) eta ebaketa-puntuak kontatu, sarea biratu eta berriro ebaketak kontatu eta horrela bira osoa egin arte. Batezbesteko ebaketa-kopuruak goiko E-ren balio hurbildua ematen digu eta hango formula erabiliz, luzera lortzen da; π-ren balioa ezagutzen dugulako, noski.



Problema hauek eta antzekoak estudiatzen dituen Matematikaren parteari, "Probabilitate Geometriko" deitzen zaio. Santaló-ren "*Integral Geometry and Geometric Probability*" ("Encyclopedia of Mathematics and its Applications" bildumaren lehen bolumena, Addison-Wesley, 1976) liburura hurbiltzen denak hainbat gauza interesgarri aurkituko du arlo honetaz. Liburuaren hitzaurrean Mark Kac matematikari famatuak "Geometria Integralaren alorrean urte askotan zalantzarik gabeko nagusitzat" jotzen du Santaló irakaslea.