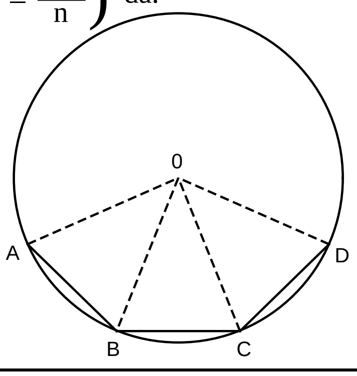
Patxi Angulo

MOSAIKOAK

Artikulu hau idaztearen arrazoia, *Elhuyar. Zientzia eta Teknika*ren aurreko bi aleetako artikuluan bilatu beharko genuke. Horrela honen zergatia asmatzea ez zaizu zail gertatuko. “Poliminoak” izeneko artikuluan planoko irudiak maneiatzen genituen. Zehatzago esan, poligonoak erabiltzen genituen, baina ez edonolako poligonoak, ez; triangelu aldekideak, karratuak eta hexagonoak baizik. Bertan genionez karratua, triangelu aldekidea eta hexagonoa, planoa osa dezaketen poligono erregular bakarrak dira. Poliminoak elkartzen genituenean, funtsean, mosaikoak osatuz ari ginen, erabiltzen genuen pieza-kopurua finitua bazen ere.

Arestian esandako baieztapena frogatzen saiatuko gara hurrengo lerroetan. Frogapena burutzeko n aldeko poligonoaren ondoz ondoko bi aldeek osatzen duten angelua kalkulatu behar da. Horixe da orain egingo duguna.

Lehenengo poligonoa zirkunferentzia batean zirkunskribatuko dugu. Poligonoaren erpinak zirkunferentziaren zentruari lotuko dizkiogu zuzenkien bidez, n triangelu isoszele osatuz. Triangelu hauek erpin bat amankomuna daukate (zentruan kokaturik dagoena alegia). Erpin honi dagozkion angeluak $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \ldots = 360°/n$ gradukoak dira. Hortaz triangelu isoszele bakoitzeko beste bi angeluek $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180° – 360°/n = \widehat{OBC}+\widehat{OCB} = \left(180 - \frac{360}{n}\right)^\circ$ batu behar dute, eta $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, …, berdinak direnez, bakoitza $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \ldots = \left(90 - \frac{180}{n}\right)^\circ$ gradukoa izango da. Baina kalkulatu nahi dugun angelua $\widehat{ABC}$ azkenekoa bezalako bi angeluz osaturik dagoenez, $\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC}$. Beraz bilatzen ari garen angelua $\overline{ABC} = \left(180° - \frac{360}{n}\right)^\circ$ da.



Hona hemen formula honetan alde-kopuruaren aldagaiari balioak emanez zenbait poligono ezberdinen angeluak:

n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
60°	90°	108°	120°	128° 34' 17,1"
n = 8	n = 9	n = 10	n = 11	n = 12
135°	140°	144°	147° 16' 21,8"	150°
n = 13	n = 14	n = 15	n = 16	n = 17
152° 18' 27,6"	154° 17' 8,57"	156°	157° 30'	158° 49' 24,7"
n = 18	n = 19	n = 20	n = 21	n = 22
160°	161° 3' 9,47"	162°	162° 51' 25,7"	163° 38' 10,9"
n = 23	n = 24	n = 25	n = 26	n = 27
164° 20' 52,1"	165°	165° 36'	166° 9' 13,85"	166° 40'
n = 28	n = 29	n = 30	n = 31	n = 32
167° 8' 34,29"	167° 35' 10,3"	168°	168° 23' 13,5"	168° 45'
n = 33	n = 34	n = 35	n = 36	n = 37
169° 5' 27,27"	169° 24' 42,3"	169° 42' 51,4"	170°	170° 16' 12,9"
n = 38	n = 39	n = 40	n = 41	n = 42
170° 31' 34,7"	170° 46' 9,23"	171°	171° 13' 10,2"	171° 25' 42,8"
n = 43	n = 44	n = 45	n = 46	n = 47
171° 37' 40,4"	171° 49' 5,45"	172°	172° 10' 26"	172° 20' 25,5"
n = 48	n = 49	n = 50	n = 51	n = 52
172° 30'	172° 39' 11"	172° 48'	172° 56' 28,2"	173° 4' 36,92"
n = 60	n = 70	n = 80	n = 90	n = 100
174°	174° 51' 25,7"	175° 30'	176°	176° 24'
n = 110	n = 120	n = 130	n = 140	n = 150
176° 43' 38,1"	177°	177° 13' 50,7"	177° 25' 42,8"	177° 36'
n = 160	n = 170	n = 180	n = 190	n = 200
177° 45'	177° 52' 56,4"	178°	178° 6' 18,95"	178° 12'
n = 300	n = 360	n = 500	n = 720	n = 1000
178° 48'	179°	179° 16' 48"	179° 30'	179° 38' 24"

Angelu hau ezagutu ondoren, ikus dezagun mosaikoa osatu ahal izateko zein baldintza bete behar diren. Lehenengo geuk oinarriak jarriko ditugu. Hauek ondoko hiru puntuetan gauzatzen dira:

a) Poligonoen erpinak puntu batean biltzen dira.
b) Mosaikoa osatzen duten poligonoak erregularrak dira.
c) Poligono guztiak berdinak dira.

Oinarri hauetatik abiatuz, puntu batean n aldeko m poligono elkartuko dugula suposatuko dugu. Hortaz bete beharreko ekuazioa $m\left(180 - \frac{360}{n}\right)^\circ = 360°$ izango da, eta berau laburtuz n (m-2) = 2m ekuazioa lortzen da. Bi ezezaguneko ekuazioa da hau, baina n eta m ezezagunetaz datu bat daukagu: m-k poligono-kopurua adierazten du eta n-k alde-kopurua. Beraz m eta n arruntak dira. Honez gain $n > 2$ poligonoa osatu ahal izateko $m = 1$ eginez gero (hots, puntuan poligono bat bakarrik biltzen da).

$n\,(1–2) = 2 \Leftrightarrow n\,(–1) = 2 \Leftrightarrow n = –2$. Hau ezinezkoa da.

$m = 2$ eginez gero, $n\,(2–2) = 4 \Rightarrow n.0 = 4$. Hau ere ezinezkoa izanik,

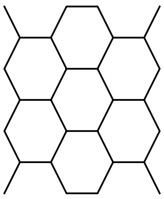
$m = 3$ hartuz $n\,(3–2) = 6 \Rightarrow n = 6$, hau da, 6 aldeko 3 poligono bilduko ditugu: hiru hexagono.

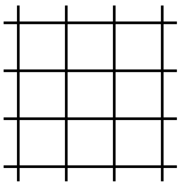
$m = 4$ aukeratuz gero, $n\,(4–2) = 8 \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow n = 4$. Beraz 4 aldeko 4 poligono, edo bestela esan, lau karratu.

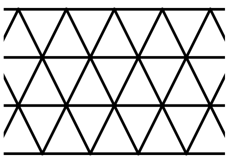
$m = 5$ bada, $n\,(5–2) = 10 \Rightarrow 3n = 10$. Hau ezin da bete

$m = 6$ bada, $n\,(6–2) = 12 \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$. Hortaz, 3 aldeko 6 poligono edo sei triangelu aldekide.

Emandako hiru soluzioak bakarrak direla frogatzerik badaukagu. Hala ere ez dugu hori hemen egingo. Hiru soluziooi dagozkien mosaikoak, ondoko irudian ikus daitezke:


Hexagonoak


Karratuak


Triangelu aldekideak

Mosaiko hauek leku askotan ikus ditzakegu, baina hauek ez diren beste mosaiko asko ere ikusten da. Beraz, infinitu mosaiko-mota dagoela esan liteke. Esate batera-ko, ezarritako oinarrian a) ezaugarria aldatzen bada eta honela berridatzi:

a') Zenbait poligonoren erpinak beste poligono baten alde batean biltzen dira.

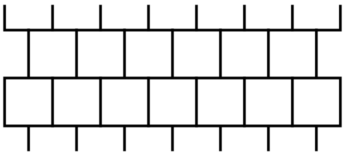
Beste mosaiko-mota lortuko dugu. Bila ditzagun honelako mosaikoak.

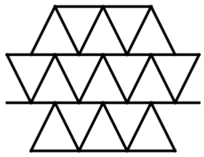
Orain, honakoa suposatuko dugu: n aldeko m poligo-noren erpinak beste baten aldean elkartzen direla. Hortaz, bete beharko den ekuazioa $m\left(180 - \frac{360}{n}\right)^{\circ} = 180^{\circ}$ izango da eta laburtuz $n\,(m-1) = 2m$ ekuazioa aterako dugu. m eta n zenbaki arruntak direla kontutan hartuz gero, aurreko ekuazioaren soluzioak $m = 2$, $n = 4$ eta $m = 3$, $n = 3$ bakarrik direla froga genezake. Bi soluzio hauek ondoko mosaikoak ematen dituzte: bi karratu biltzen dira beste baten aldean eta hiru triangelu aldekide beste baten aldean (ikus irudia).

Beste mosaiko-mota bat lor genezake c) ezaugarria aldatuko bagenu, eta esaterako, beste hau jarriko bagenu:

c') Poligonoak ezberdinak dira.

Oraingo azterketa ez da gehiegi luzatuko. Hala ere


Bi karratu beste baten aldean


Hiru triangelu beste baten aldean

zenbait kasutan banatuko dugu mosaiko-mota hau.

Demagun bi poligono-mota bakarrik erabili nahi ditugula. Puntu batean, beraz, n aldeko m poligonoren erpinak eta h aldeko k poligonoren erpinak bilduko ditugu. Hemendik ondoko berdintza ondorioztatzen da: $m\left(180 - \frac{360}{n}\right)^{\circ} + k\left(180 - \frac{360}{h}\right)^{\circ} = 360^{\circ}$. Hau labur dezakegu $mh\,(n-2) + kn\,(h-2) = 2nh$ ekuazioa lortu arte.

Ekuazio hau ebaztea zailagoa bada ere, aurreko tekni-ka erabiliz eta m, n, k, h zenbakiak arruntak eta $n, h > 2$ direla kontutan hartuz saiatuko gara honelako mosaiko guztiak lortzen.

$m = 1$, $k = 1$ suposatuz, hau da, poligono bana hartuz:
$h\,(n-2) + n\,(h-2) = 2nh$ edo laburtuz $n+h = 0$ eta hau ezin da bete.

$m = 2$, $k = 1$ hartuz ($k = 2$, $m = 1$ posibilitatea baliokidea da).
$2h(n-2) + n(h-2) = 2nh \Rightarrow$ (laburtuz) $n\,(h-2) = 4h$
Ekuazio honen soluzio guztiak, frogatu gabe, emango ditugu:
$n = 12$, $h = 3$ hortaz bi dodekagono eta triangelu bat (irudian)
$n = 8$, $h = 4$, hau da, bi oktogono eta karratu bat (irudian)
$n = 6$, $h = 6$ edo bi hexagono eta hexagono bat. (Hau baztertu egin behar da, poligonoak berdinak direlako)
$n = 5$, $h = 10$ edo bi pentagono eta dekagono bat.

$m = 3$, $k = 1$ hartuz gero (edo $m = 1$, $k = 3$)
$3h\,(n-z) + n\,(h-z) = 2nh$ lortzen da eta laburtuz $n\,(h-1) = 3h$
Honen soluzioa, $n, h > 2$ badira, bakarra da.
$n = 4$, $h = 4$. Hortaz, hiru karratu eta karratu bat, baina baztertu egin behar da, poligonoak berdi-nak direlako.

$m = 4$, $k = 1$ aukeratuz (edo bere baliokidea $m = 1$, $k = 4$)
$4h\,(n-2) + n\,(h-2) = 2nh$ ateratzen da eta hemendik $n\,(3h-2) = 8h$.
Kasu honetan ere soluzio bakarra daukagu.
$n = 3$, $h = 6$. Beraz lau triangelu eta hexagono bat (irudian).

$k = 1$ finkatuz eta m aldatuz, hemendik aurrera ez dago bi poligono-mota ezberdineko mosaikorik.

$m = 2$, $k = 2$. Beraz bina poligono elkartuz:
$2h\,(n-2) + 2n\,(h-2) = 2nh \Rightarrow n\,(h-2) = 2h$ eta ekuazio honen soluzioak jadanik ezagutzen di-tugu:

n = 6, h = 3, hau da, bi hexagono eta bi triangelu (irudian)

n = 4, h = 4, hots, bi karratu eta bi karratu (baztertu egingo dugu)

n = 3, h = 6 edo bi triangelu eta bi hexagono (hau lehenengoaren berdina denez kendu egingo dugu).

m = 2, k = 3 (edo m = 3, k = 2)

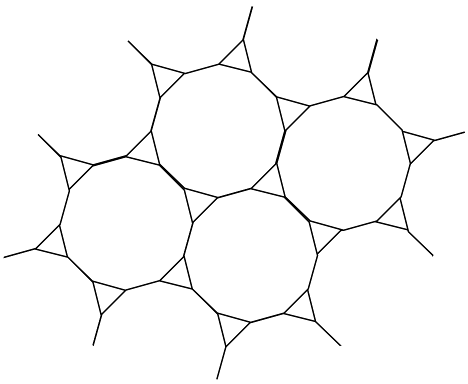
2h (n-2) + 3n (h-2) = 2nh eta laburtuz gero, 3n(h-2) = 4h. Ekuazio honen soluzioak ondokoak dira:

n = 2 h = 6, baina n > 2 poligono osatzeko. Hortaz kendu egingo dugu.

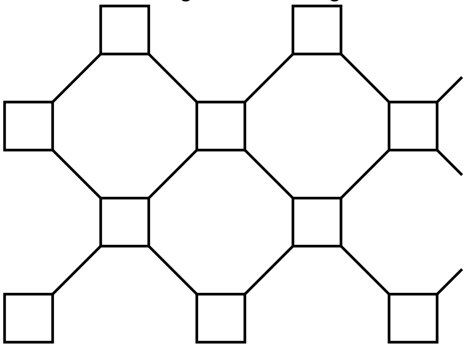
n = 4 h = 3, hau da, bi karratu eta hiru triangelu aldekide (irudian).

m= 3 eta k = 3, hau da, hiruna poligono hartu nahi izanez gero, bi poligono-motak ezberdinak direnez, mota bateko hiru poligonoen angeluen batura 180 gradukoa baino handiagoa izango litzateke. Beste batura, ordea, 180°koa baino txikiagoa, hau da, $3\left(180 - \frac{360}{n}\right)^{\circ} > 180^{\circ}$ eta $3\left(180 - \frac{360}{h}\right)^{\circ} < 180^{\circ}$. Baina azken ezberdin–tza ezin da bete; angelu txikieneko poligonoa triangelu aldekidea bait da (ikus taula), eta hiru triangelu elkartuz jadanik 180° lortzen da.

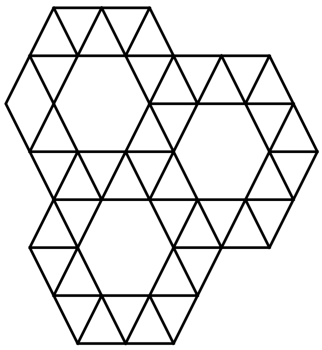
Hortaz, bi poligono-motaz osatutako mosaiko guztiak aurkitu ditugu. Batzuk irudian ikus ditzakezu:



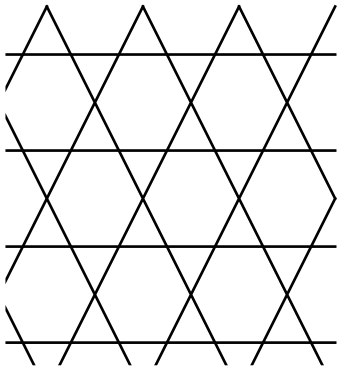
m = 2, n = 12; k = 1, h = 3
bi dodekagono eta triangelu bat



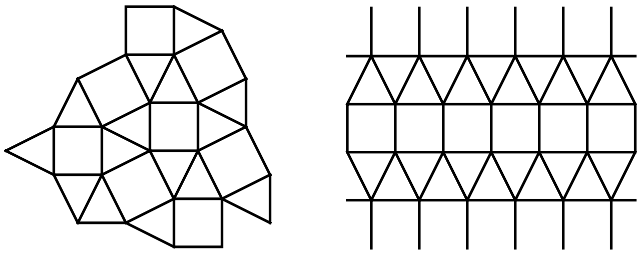
m = 2, n = 8; k = 1, h = 4
bi oktogono eta karratu bat



m = 4, n = 3; k = 1, n = 6
lau triangelu eta hexagono bat



m = 2, n = 6; k = 2, h = 3
bi hexagono eta bi triangelu



m = 2, n = 4; k = 3, h = 3
bi karratu eta hiru triangelu

Hurrengo lana hiru poligono-mota ezberdinez osatutako mosaikoak bilatzea izango da. Ez ezazu pentsa lan luzea izango denik. Zenbat eta poligono-mota gehiago erabili, are eta posibilitate gutxiago nahasteko.

Azterketa honetan idazkera berezia erabiliko dugu huts egin ez dezagun. Poligonoen angeluak poligonoen lehenengo letraz izendatuko ditugu eta honekin batera azpiindize bat kopurua adierazteko. Beraz, hiru triangeluren angeluen batura.

$T_1 + T_2 + T_3$ idatziko dugu eta bi pentagonoren angeluena $P_1 + P_2$. Horretaz gain X, Y eta Z letrak poligono ezezagunak adierazteko eta ekuazioak edo baldintzak idazteko erabiliko ditugu.

Angelu txikieneko hiru poligono ezberdinen angeluak batuz $T_1+K_1+P_1 = 60° + 90° + 108° = 258°$ batura lortzen dugu. Honek honako hau esan nahi du: hiru edozein poligono ezberdin elkartuz, poligonoen angeluen batura $X_1 + Y_1 + Z_1 \geq 258°$ dela. Hortaz, poligono gehiago bildu nahi badugu, poligono berrien angeluen batura gehienez 102°koa izango da. Ondorioz, hasierakoei karratuak eta triangeluak bakarrik erants dakizkieke.

Laburtuz, hau esango dugu: hiru poligono–mota erabiliz gero, karratua eta triangelua bakarrik errepika daitezke.

Has gaitezen, beraz, poligono bana hartzen dugula suposatuz. Izan bitez X_1, Y_1 eta Z_1 hiru poligono ezberdin horien angeluak. Ondokoa bete behar da: $X_1 + Y_1 + Z_1 = 360°$.

$X_1 = 60°$ suposatuz, $Y_1 + Z_1 = 300°$ bete beharko da: Y_1, $Z_1 > 60°$.

$Y_1, Z_1 < 180°$ eta $Y_1 \neq Z_1$ baldintzek posibilitateak murriztu egiten dituzte. Hauek hasierako taulan bilatuz, ondoko soluzioak lortuko ditugu:

$Y_1 = 128°\ 34'\ 17{,}1''$ eta $Z_1 = 171°\ 25'\ 42{,}8''$. Hortaz triangelu, heptagono eta 42 aldeko poligono bana.

$Y_1 = 135°$ eta $Z_1 = 165°$. Beraz triangelu, oktogono eta 24 aldeko poligono bana.

$Y_1 = 140°$ eta $Z_1 = 160°$, hau da, triangelu, noneagono eta 18 aldeko poligono bana.

$Y_1 = 144°$ eta $Z_1 = 156°$, edo triangelu, dekagono eta 15 aldeko poligono bana.

Triangelua erabiliz, ez dago beste mosaikorik.

$X_1 = 90°$, hau da, karratua hartuz: $Y_1 + Z_1 = 270°$ berdintza daukagu.

Baldintzak orain $Y_1, Z_1 > 90°$, $Y_1, Z_1 < 180°$ eta $Y_1 \neq Z_1$ dira eta soluzioak ondorengoak:

$Y_1 = 108°$ eta $Z_1 = 162°$. Beraz, karratu, pentagono eta ikosagono bana.

$Y_1 = 120°$ eta $Z_1 = 150°$. Hortaz, karratu, hexagono eta dodekagono bana (irudian).

Karratua erabiliz ez dago mosaiko gehiagorik.

$X_1 = 108$ aukeratuz gero (pentagonoa alegia), $Y_1 + Z_1 = 252°$ berdintza lortuko dugu eta baldintzak $Y_1, Z_1 > 108°$, $Y_1, Z_1 < 180°$ eta $Y_1 \neq Z_1$.

Kasu honetan ez dago soluziorik. Are gehiago, hemendik aurrera ez dago hiru poligono ezberdinez mosaikoa osatzerik.

Pentsa dezagun orain triangelua errepikatzen dugula eta azter ditzagun posibilitate ezberdin guztiak.

Bi triangelu hartzen ditugula suposatuz, hau da, $T_1 + T_2 = 120°$, beterik izango dugu eta betetzeke 240° geratzen da. Karratu bat gehituz, hots $T_1 + T_2 + K_1 = 210°$. Orain 150° bete gabe dago eta hau dodekagonoarekin, bakarrik, bete daiteke. Hortaz:

Bi triangelu eta karratu eta dodekagono bana.

Bi triangeluei bi karratu elkartuz gero, $T_1 + T_2 + K_1 + K_2 = 300°$ beteko da eta betetzeko 60° falta, baina ezin dugu triangelua erabili; hiru poligono ezberdin izan behar bait dute.

Beraz, karratuekin bukatu dugu azterketa, eta hemendik aurrera hasierako bi triangeluei poligono bana bakarrik erants diezaiekegu. Ondorioz 240° batzen duten bi angelu bilatu beharko ditugu taulan. Ekuazioa bilatuz, $T_1 + T_2 + X_1 + Y_1 = 360°$ eta $T_1 = T_2 = 60°$ denez $X_1 + Y_1 = 240°$, baina hurrengo baldintzak hartu behar dira kontutan: $X_1, Y_1 > 90°$ eta $X_1 \neq Y_1$. Hemendik $X_1, Y_1 < 150°$ ateratzen da eta honek erraztu egiten du bilakuntza. Taulan ez dagoela soluziorik ikus daiteke. Are gutxiago $X_1, X_2, \ldots$ edo $Y_1, Y_2, \ldots$ poligono-kopuru handiagoa hartuz.

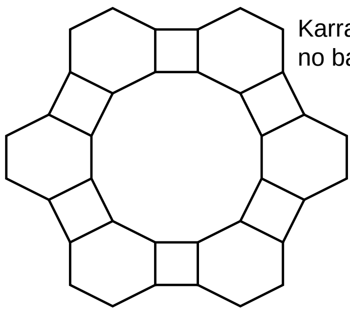
Bi triangelu harturik bukatu dugu azterketa. Har ditzagun, orain, hiru triangelu: $T_1 + T_2 + T_3 = 180°$. Betetzeke beste 180° dauzkagu eta hau bi poligono ezberdin edo gehiagoz osatzea ezinezkoa suertatzen da. Are gutxiago triangelu gehiago hartzen bada.

Bil ditzagun orain, bi karratu. $K_1 + K_2 = 180°$ beteko ditugu eta osatzeko 180° falta dira. Hau burutzeko, gogoratu bi poligono-mota ezberdinez egin behar dela. Taulari begiratuta aurkitzen dugun soluzio bakarra $X_1 = 60°$ eta $Y_1 = 120°$ da. Beraz, bi karratu eta triangelu eta hexagono bana daukagu (ikus irudia).

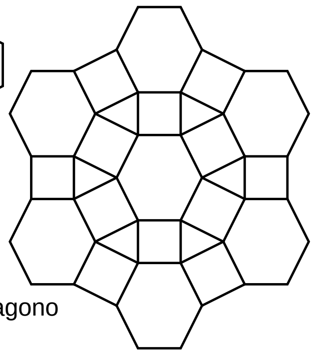
Hiru karratu bilduz $K_1 + K_2 + K_3 = 270°$. Falta dena 90°, beste karratu batez bakarrik bete daitekeelarik. Ondorioz soluziorik ez dagoela esango dugu.

Lehenago esan dugunez, karratua eta triangelua bakarrik errepika daitezke. Hortaz gure azterketa bukatutzat eman dezakegu.

Hona hemen azken motako bi mosaiko:



Karratu, hexagono eta dodekagono bana



Bi karratu eta triangelu eta hexagono bana

Zer esanik ez, lau poligono-mota erabiliz ezin da mosaikorik osatu. Angelu txikieneko poligonoak hartuz (triangelu, karratu, pentagono eta hexagonoa alegia) $T_1 + K_1 + P_1 + H_1 = 60° + 90° + 108° + 120° = 378°$ betetzen da.

Hemen agertu diren mosaikoek ezaugarri amankomun bat daukate eta hauxe da: b) poligono guztiak erregularrak dira. Baina hau ez da mosaikoak osatzeko betebeharreko baldintza. Poligono irregularrez ere badaukagu osatzerik, baina honen azterketa bukaezina iruditzen zait.

Poligonoez aparte beste irudiekin ere egin daitezke mosaikoak, horretarako M.C. Escher-en irudiak besterik ez dituzu ikusi behar.

Bukatzeko, ondokoa aitortu behar dizut: lortu ditugun soluzio guztiak teorikoak dira. Batzuk praktikan egin daitezke (ikus irudiak), baina ez nago ziur hori guztiekin egin daitekeenik. Esate baterako, hiru poligono ezberdin erabiliz bat bakarrik gauza daitekeela entzuna daukat. Mosaiko hau triangelu, noneagono eta 18 aldeko poligono banak osatzen du. Honetaz aparte, kasu bakoitzean osa daitezkeen mosaikoek ez dute bakarrak zer izanik. Adibidez, m = 2, n = 4 eta k = 3, h = 3 kasuan, bi mosaiko ezberdin lor daitezke irudian ikusten duzun bezala.