Patxi Angulo

MÖBIUS-EN XINGOLA

Denok daukagu buruan Matematika zientzia abstraktua denaren ideia. Beti teoria berrietan murgildurik, ez dakigu bere beso ezkutuak noraino luzatzen diren. Horretaz aparte Matematikan erabiltzen diren eredu gehienak ez dira gure bizitzan ikusten, antzematen, ukitzen, entzuten eta sentitzen fisikan gertatzen den bezala.

Hala eta guztiz ere kontrakoak badaude. Horietako bat dakarkizugu hona; Möbius-en xingola hain zuzen ere.

Irakurtzen segitu baino lehen, har itzazu papera eta guraizeak.

Möbius-en xingola lortzeko har ezazu paperezko zerrenda luze bat, mutur bati buelta erdia eman (180°) eta gero bi muturrak kolaz pegatu eraztuna osatuz. Eskuetan duzun eraztunak ez dauzka bi aurpegi edo bi alde, pentsa zitekeen bezala.

Eraztun arruntek bi aurpegi dauzkate, bakoitza kolore desberdinez pinta daitekeelarik. Gure eraztuna, Möbius-en xingola, aldiz, ezin da bi koloretan pintatu. Puntu batetik pintatzen hasten bazara, bukatzen duzunean xingola osoa pintatu duzula ohartuko zara; lehen esan dugunez xingolak alde bakarra bait dauka (pintatu duzuna besterik ez).

Arazoa ez da hor bukatzen; ertzarekin ere gauza bera gertatzen bait da. Puntu batetik hasita, ertz osoa korritu eta gero puntu berberera bueltatzen da. Hortaz, alde bat eta ertz bat dauzka Möbius-en xingolak.

Gainazal hau berezia da beste arrazoi bategatik ere. Puntu batean gainazalarekiko bektore normala kontutan hartzen baduzu, gainazalean zehar eta ertzarekiko paralelo buelta bat eman eta gero bektore normala kontrako norantzan geratuko da (hau da, hasieran ezkerrerantz begira bazegoen, buelta eman ondoren eskuinerantz begira egongo da). Hortaz, puntu berean bi bektore normal izango zenituzke. Horrek, gainazala ez dela norabidagarria esan nahi du. Jakina, guzti hau hiru dimentsioko koordenatu-sistema batekiko hartu behar da kontutan.

Xingola hau August Ferdinand Möbius matematikari eta astronomoak eriden zuen 1858. urtean. Harez gero Möbius-en xingola topologoen jostailu bilakatu da.

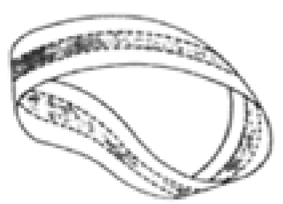
Prestatu papera eta guraizeak, eskulanak egingo ditugu eta.

Xingola arrunt bat erditik mozten baduzu, bi xingola berdin lortuko dituzu. Zer gertatuko da Möbius-en xingolarekin gauza bera egiten saiatzen bazara? (egin ezazu) … Horixe! ez dira bi xingola lortzen; bat bakarrik. Eta lortzen den xingola berria Möbius-ena edo arrunta da? Zeuk egiaztatu … xingola berria bi aurpegikoa bada ere, bi kiribil dauzka, hots 180°ko lau biraketa edo 360°ko bi buelta oso. Xingola berria estuagoa da (bestearen erdia) eta aldi berean luzeagoa (luzera bikoitza). Orain berriro erditik mozten baduzu, bi xingola (estuagoak baina luzera berdinekoak) lortuko dituzu, baina kateatuak (ezin dituzu banatu).

Beste lan bat egingo dugu orain.

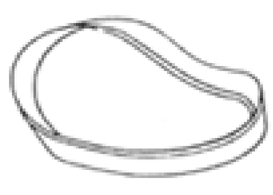
Har ezazu paperezko zerrenda bat eta bana itzazu bi aldeak hiru zatitan, bi lerro zuzen horizontalen bidez. Erdiko zatiak

1



2

3

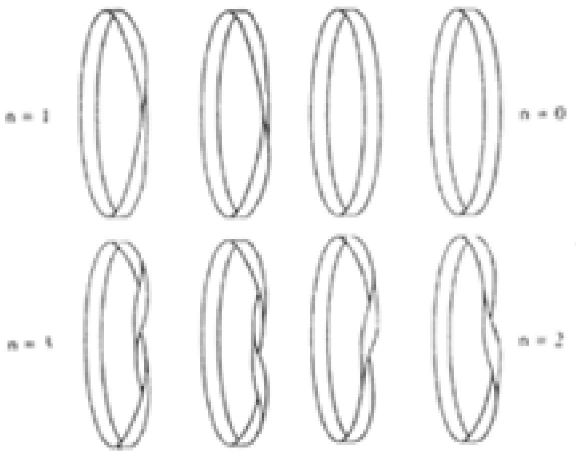


beste kolorez pinta itzazu. Orain Möbius–en xingola osatu. Xingola hau hiru zatitan banaturik dago, erdikoa kolore desberdinekoa izanik. Moztu ezazu xingola lerro zuzen horietatik. Bukatzen duzunean bi xingola izango dituzu: bata jatorrizko xingolan erdialdean zegoena eta bestea aldamenetakoez osatua. Erdikoa (pintatua) Möbius-en xingola da. Bestea, ordea, bi kiribildun xingola duzu. Biak zabalera berdinekoak dira, baina bigarrena luzeagoa (bikoitza) da. Bi xingola hauekin lodiera hirukoitza duen Möbius-en xingola osa daiteke, luzeenaz bestea (pintatua) inguratuz. Esan dugunez xingola hirukoitz hau beste bi xingolaz dago osatuta, aldamenetako xingolen artean bestea (pintatua) dagoelarik.

Efektu bera lor daiteke paperezko hiru zerrenda hartuz eta bat balira bezala mutur bati bueltaerdia (180º) eman ondoren sei muturrak binaka pegatuz.

Möbius-en xingola lortzeko, paperezko tiraren mutur bati bueltaerdia (180°) eman diogu. Hala ere ez da hori aurpegi bakarreko xingola lortzeko posibilitate bakarra, ez. Izan ere muturrari buelta t'erdi (540º) edo bi buelta t'erdi (900º), edo… emanez gero, horrelako xingola lor bait dezakegu.

Hau dela eta, xingolak bi klasetan bana genitzake: aurpegi batekoak eta bi aurpegikoak. Lehenengoa mutur bati bueltaerdien kopuru bakoitia emanez lortuko da; bigarrena bueltaerdien kopurua bikoitia denean.



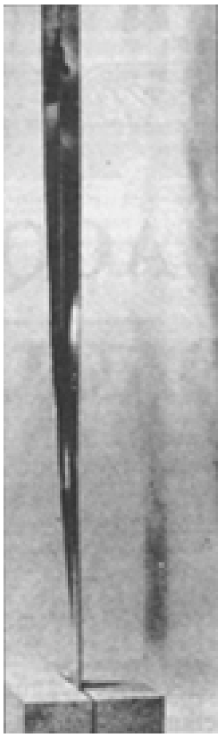
Bueltak ezkerrerantz edo eskuinerantz eman daitezke. Horrela lortzen diren xingolak homeomorfoak dira topologian, hots, baliokideak gure hizkuntzan. Hala ere, ezin da bata beste bilakatu.

Honela aurpegi bateko xingolek erditik moztuz gero, xingola bat emango digute. Xingola berriaren ezaugarriak ondokoak dira: zabalera jatorriarenaren erdia eta luzera bikoitza ditu; bi aurpegiko xingola da; jatorrizko xingolak n bueltaerdi badauzka, xingola berriak 2n+2 bueltaerdi izango ditu, edo n+1 kiribil (buelta osoa 360°). Hortaz, Möbius-en xingolak (n=1) lau bueltaerdiko edo bi kiribileko xingola emango digu.

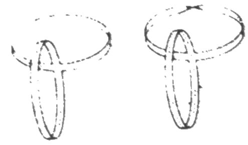
Aldiz, bi aurpegiko xingolek, erdibitu (lehenago ez dugu aditz hau erabili nahi izan) ondoren, bi xingola berdin ematen dizkigute. Xingola berrien ezaugarriak: jatorrizkoaren luzera berdina eta zabaleraren erdia dute; bi aurpegiko xingolak dira; jatorrizkoak adina bueltaerdi daukate; n=0 deneko kasuan xingolak aske agertzen dira, beste kasuetan n=2, 4, 6,… bi xingola kateatu lortzen dira.

Saio asko egin da Möbius-en xingola industrian erabiltzeko asmoz, hala nola, Lee de Forest-ek 1923. urtean eite hau zuen pelikula bat asmatu zuen xingola garraiatzaileak, iragazkin autogarbitzaileak, xingola kiskalgarriak, idazteko makinarako xingolak, eta abar luze bat aipa genezake.

Arteetan ere ikus dezakegu zenbait adibide: atal honetan ezaguna duzun M.C. Escher artistak egindakoak; Max Bill eskultore suitzarra; Washington D.C.-ko Historia eta Teknologiaren Museoaren aurrean dagoen bi metro altuko xingolak bere buruarekiko bira egiten du.



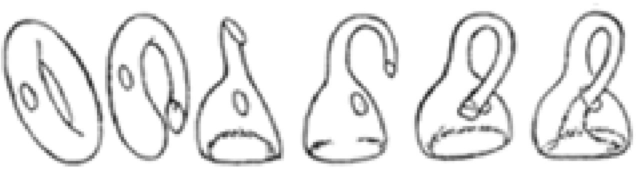
Möbius-en xingola batean ondorengo esaldi bukaezina idatz liteke: "Behin batean bazegoen honela hasten zen ipuin bat behin batean bazegoen…"



Bostgarren irudian agertzen diren paperezko egiturak antzekoak dira, ezkerrekoa bi eraztun arruntek osatzen dute. Eskuinekoa, aldiz, eraztun arrunt batek eta Möbius-en xingola batek. Moztu itzazu biak puntuzko lerroetatik eta konpara itzazu lortutako emaitzak.

Honaino Möbius-en xingolaz aritu gara. Hala ere ezin dugu Möbius-en xingolarekin zerikusirik duen beste eredu matematiko bat aipatzeke utzi. Möbius-en xingola paperezko zerrenda bat erabiliz lortzen zen. Eredu berri hau, ordea, Möbius-en bi xingola kolaz pegatuta lor liteke. Eredu berriak Klein-en botila du izena eta Felix Klein matematikariak eridendakoa da.

Klein-en botila ezin da Möbius-en xingola bezain erraz eraiki. Hala ere, kristala nahi dugun bezala txikiagotu eta tira daitekeela suposatuz azken irudian ikusten den bezala lor daiteke botila. Honela lortzen den botilak zulo eta ertz bana duela esan behar da. Teorian zulo eta ertzik gabe lor daiteke, errealitatean (fisikoki) ezinezkoa bada ere. Botila honen ezaugarria aurpegi bat bakarrik edukitzean datza; Möbius-en xingolaren ezaugarri bera.



Klein-en botila eraikitzeko materiala, hots kristala, oso malgua dela suposatu dugu. Matematikaren adar den Topologian honelako suposaketak zilegi dira. Izan ere, Topologiak tamaina eta formen aldaketekiko inbariante diren posizio-propietateak aztertzen ditu. Agian, propietate topologikoak definitzeko erarik errazena luzapen eta laburpenekiko aldaezin irauten duten propietate geometrikoak direla esatea da.