Patxi Angulo eta
Xabier Artola

DIAGRAMA LOGIKOAK (II)

Ekaineko alean, Venn-en diagramaren posibilitate batzuk azaldu genituen. Baina hau ez da asmatu den sistema bakarra. Orain ikusiko dugunez, beste sistemak ere badaude klase-logikan eta proposamendu-logikan erabiltzeko.

Beste sistema bat, Lewis Carroll idazle ospetsuak asmatutakoa da. Lewis ez zen zirkuluez baliatu; karratuez baizik. Berak erabiltzen zituen bezala azalduko ditugu hemen. Karratu bat lau laukitxo berdinetan zatitzen zuen, X eta Y gaien konbinazio guztiak sartzeko. Gero hirugarren gaia erabiltzeko karratu horren barruan beste txikiago bat sartzen zuen (1. irudia). Horrela X, Y eta M gaien arteko konbinazio posible guztiak agertzen ziren. Lewis-ek X gaiaren ukapena adierazteko X’ (ez X) erabiltzen zuen. Horrela karratuaren goiko erdia X da, beheko erdia, aldiz, X’ (ez X). Ezker aldea Y da, eskuinaldea Y’; karratu txikiaren barruko aldea M den bitartean kanpo aldea M’ da.

Silogismo baten premisak itzultzeko eskualde egokiak fitxekin markatzen zituen. Horregatik elementurik duten eskualdeetan fitxa gorria, eta elementurik gabekoetan fitxa grisa ipintzen zituen. Ondoz-ondoko bi eskualdeetan elementurik baldin bazegoen, baina zeinetan ez bazekien, fitxa gorria muga-lerroan ipintzen zuen.

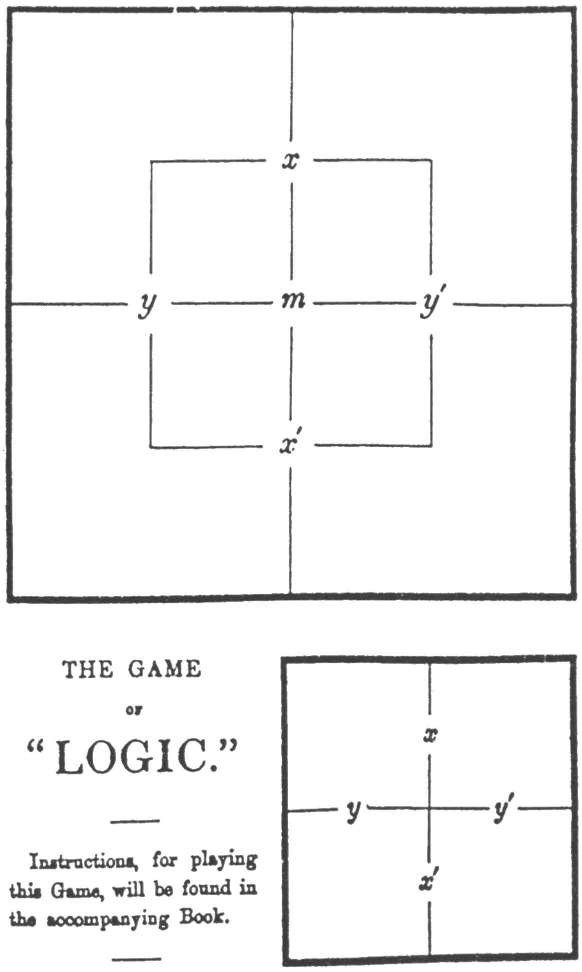
Lewis-en problema tipikoa ebazten saia zintezke:

Abstemio guztiei gustatzen zaie azukrea	“M oro X da”
Urretxindor batek berak ere ez du ardorik edaten	“Y bat ere ez da ez M”

Fitxak Lewis-en arauei jarraituz kokatzen badira, “Y bat ere ez da ez X” ondorio zuzena atera daiteke, hau da, urretxindor bati ere ez dio azukreak higuin ematen. Logiko klasikoek ez zuketen silogismo hau onartuko.

Lewis-en diagrama n gaietara heda daiteke. Lewis-ek berak bere Symbolic Logyc liburuan zortzi gairi egokitutako 256 laukitxoko diagrama erakusten digu.

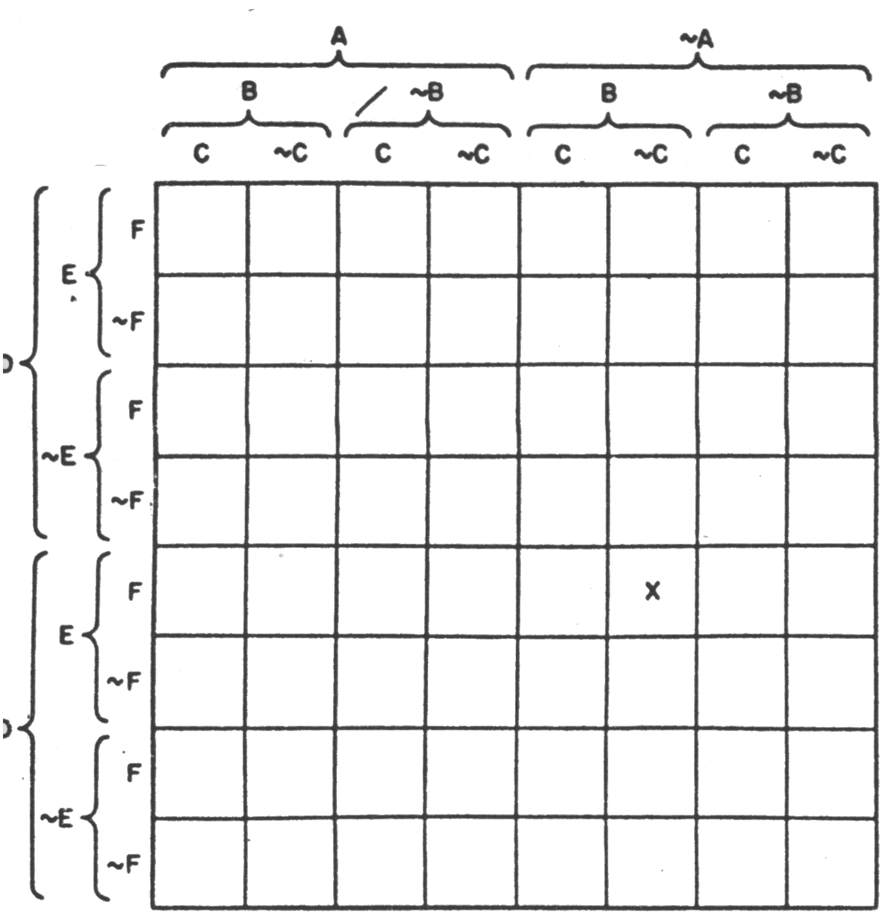
Lewis-en grafikoa The Game of Logyc liburuxkan agertu zen lehenbiziko aldiz. Liburuxkarekin batera Lewis-en diagrama zuen txartel bat eta bederatzi fitxa (lau gorri eta bost gris) zituen poltsa ematen zitzaien erosleei (1. irudian ikusten da banatzen zen txartela).



1. irudia.

Lewis-en diagrama, Alland Marquand John Hopkins unibertsitateko klaustralak, hiru gaitarako diagraman n gaitara hedatzeko asmoz asmatu zuen diagramen motakoa da.

Marquand-ek karratu bat laukitxo berdinetan zatitzen zuen gai-kopuruaren arabera. Hamargarren irudian 6 gaitarako diagrama ikus daiteke. Bertan agertzen den x horrek &AB&C&DEF (ez A, B, ez C, ez D, E, F) klasea



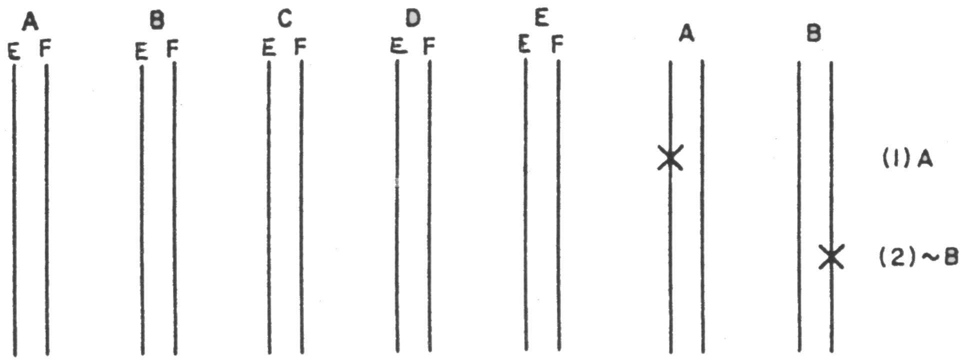
2. irudia.

adierazten du. Grafiko-mota honekin ere ebatz daitezke n gaiko problemak, laukitxo hutsak ilunduz eta elementudunak X batez markatuz.

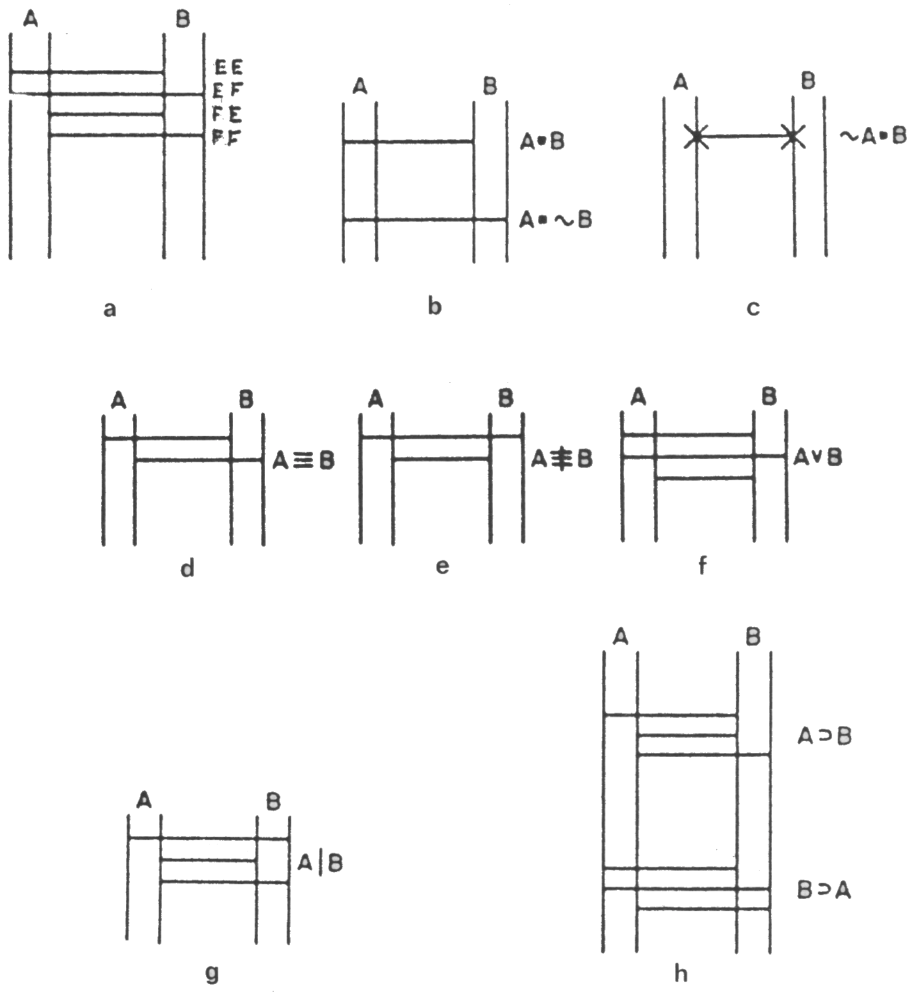
Diagrama-mota honi jarraituz karratuaren zatiketa desberdinak proposatu dira, baina ez ditugu horiek hemen aipatuko.

Proposamenduzko kalkulua diagramen bidez adierazten saiatu den beste matematikari eta artikulugile ospetsua, Martin Gardner bera dugu, (bere “Makina eta diagrama logikoak” izeneko liburutik atera dugu artikulu honen mamia).

Martin-ek sarezko diagrama proposatzen du. Problemaren gai bakoitza bi zuzen bertikal eta paraleloen bidez adierazten da. Bakoitzak egibalio bat adieraziko du. Hitzarmenez ezkerrekoa egiazkoa eta eskuinekoa faltsua izango dira. (3. irudia). Gai bat egiazkoa bada, X idatziko da ezkerreko zuzenaren gainean. Aldiz faltsua bada, eskuinekoan. Bi gai lotzen dituzten enuntziatuak zuzenki horizontalez adieraziko ditugu, enuntziatuaren egitaularen arabera. Zuzenki hauei zubi deituko diegu; bi gairen artean zubiaren papera betetzen bait dute. 4. irudian zenbait adibide ikus dezakegu: 4a) irudian bi gai lotu ditzaketen zuzenki guztiak agertzen dira eta hauen parean dagozkien egitaularen balioak. 4b) diagraman A ■B, “A eta B”, erlazioa adierazten du goiko zubiak, hau da, lau posibilitateetatik EE bakarrik bete daiteke. Beheko zubiak, ordea, A■ &B, “A eta ez B”, erlazioa adierazten du. 4d) diagraman A≠, “A baldin eta soilik baldin B”, enuntziatua dugu. 4e) diagraman A B, “(≢) A edo B, baina ez biak batera” enuntziatuari dagokiona ikus daiteke. Enuntziatu batean zubi bakarra izango bagenu, &A B esaterako ■ez A eta B”, egiazkoa izango litzateke eta zubiaren bi muturretan x idatziko genuke. Bi gaien egibalioa determinatuz 4c). A|B, “A eta B ez dira batera egiazkoak” enuntziatuaren diagraman (4g)) hiru zubi agertzen dira; A B, “A eta B”, en■tziatuari falta zaizkionak hain zuen ere. Hortaz bi enuntziatu hauek elkarren ukapen direla esango dugu. A æ B “Baldin A orduan B” eta B æ A “baldin B orduan A” enuntziatuak 4h) irudiko diagraman agertzen dira. Enuntziatu-mota honek proposamenduzko kalkuluan diagramako zubiek adierazitakoa beste esanahirik ez dute. Beraz egiazko proposizio batek egiazko proposizioa bakarrik inplika dezake. Proposizio faltsuek, ordea, egiazko proposizioa zein proposizio faltsua inplika dezakete.



3. irudia.



4. irudia.

Bi gairen arteko erlazio bitar guztiak sarezko diagramen bidez ikusi ditugu. Bi erlazio bitar baliokideak izango dira beraien sarezko diagrametan zubi berdinak agertzen badira.

Ikus dezagun Martin-ek proposatzen duen problema; hurrengo premisok osatzen dutena:

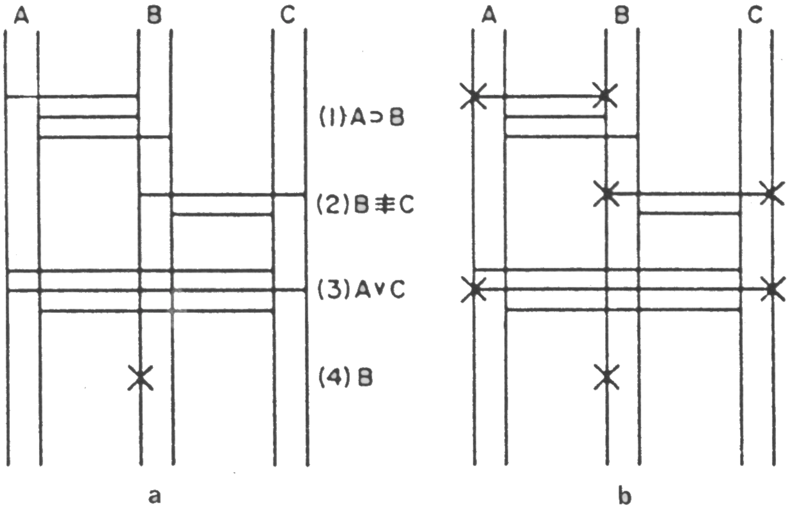
1	Baldin A egiazkoa bada, B ere egiazkoa da	A æ B
2	Edo B egiazkoa da edo C egiazkoa da, baina ez biak batera	B ≢ B
3	A edo C egiazkoak dira, edo biak	A v C
4	B egiazkoa da	B

Zer ondoriozta daiteke A eta C gaiez?

Lehenengo urratsean lau premisen diagrama irudikatu behar da (5 a) irudia). Bigarren urratsean "aldamiaia"ren egitura arakatu behar da, ea A eta C gaien egibalioak zeharo determinatuak geratzen diren: B-ren egibalioa ezaguna denez, B-ren egiazko zuzenean hasiko gara. Zuzen honetan bukatzen den zubi bat bilatu behar dugu. Zubi honek zera bete beharko du: beste muturra bukatzen den zuzenetik ezin da abiatu aurreko zubiarekin kontraesanera eramango gaituen beste zubi bat. Esate baterako, 1 premisako bi zubi bukatzen dira aukeratutako zuzenean. Bigarrenari jarraitzen bagatzaizkio, A-ren zuzen faltsura abiatzen da. Hortaz, kontraesana izango genuke. Goikoa aukeratuz gero, kontraesanera iritsiko ginateke, bide luzeagoa egin ondoren. Beraz, kontraesanera ez garamatzan zubi bakarra 2 premisakoa da, eta hortik pasatu behar dugu zubiaren bi muturretan x bana idatziko dugu. Hortaz 4 eta 2 premisek c faltsua dela esatera behartzen gaituzte. C-ren zuzen faltsuan zubi bakar bat bukatzen da; 3 premisakoa alegia. Beraz zubiaren mutur horretan ere x idatziko dugu. 3 premisako zubia gurutzatuz, A-ren egiazko zuzenera iritsiko gara eta bertan beste x bat ipiniko dugu. C faltsua eta A egiazkoa lortu ditugu. Hala ere, azterketari segi egin behar diogu, kontraesanera ez garela helduko ziurtatzeko. A-ren egiazko zuzenera, eta kontraesanera ez garamatzan zubi bakarra heltzen da 1 premisara. x idatziko dugu zubi honen ezker–muturrean. Zubia gurutzatzen badugu, B-ren egiazko zuzenera helduko gara kontraesanik aurkitu gabe. Bertan beste x bat ipiniko dugu, horrela ibilbidea ixten delarik. 5b) irudia izango dugu orduan.

Beste bideak aztertu nahi baditugu, kontraesanik gabeko beste posibilitaterik ez dagoela ikusiko duzu. Beraz, A egiazkoa, B egiazkoa eta C faltsua direla ondorioztatzen dugu.

Hemen problema zailagoa utziko dizugu saia zaitezen:



5. irudia.

1 Abuztuan, edo kapela eramaten dut edo buruhutsik ibiltzen naiz.

2 Inoiz ez naiz abuztuan buruhutsik ibiltzen korbata janzten badut.

3 Abuztuan kapela eramaten dut edo korbata, eta batzuetan biak

Azterketa errazteko, ondoko gaiak gomendatzen dizkizugu:

A Abuztuan kapela eramaten dut

B Abuztuan korbata eramaten dut

C Abuztuan buruhutsik

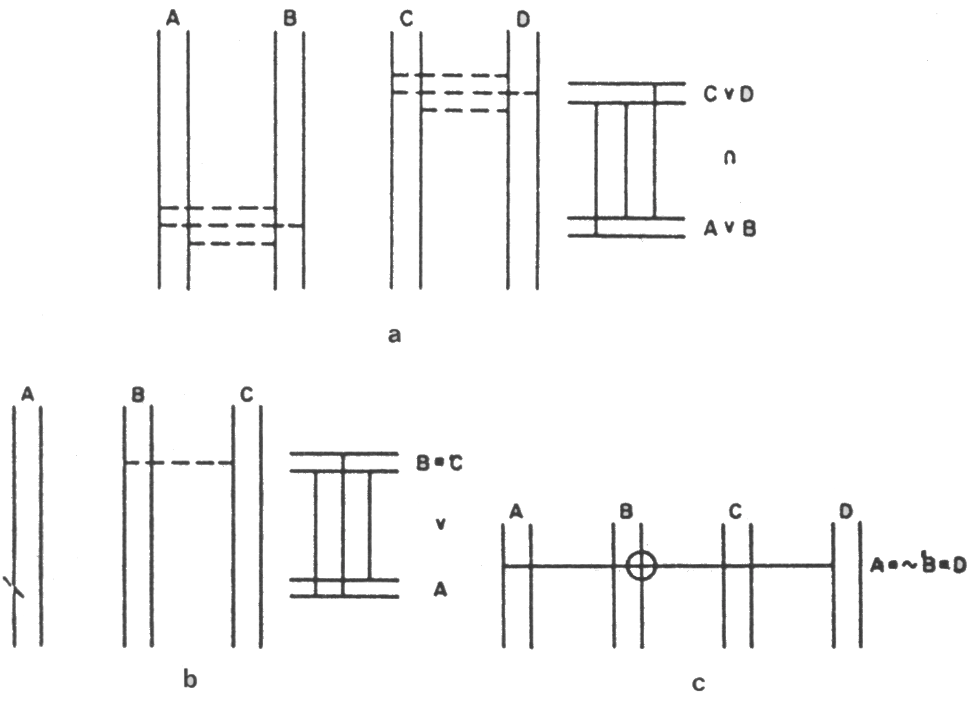
Enuntziatu konposatuen diagramak ere lor daitezke. Martin-ek, adibide gisa, bere liburuan (A v B) æ (C v D) enuntziatuaren diagrama erakusten digu (6a) irudia). (A v B) eta (C v D) enuntziatuen diagrametan zubiak zatika irudikatzen dira behin-behinekoak direla adierazteko. Geroago egiazkoak direla jakingo bagenu, lerro osoz irudikatuko genituzke. Faltsuak izanez gero, ezaba litezke eta falta diren zubiak (ukapenari dagokionak) irudikatuko genituzke lerro osoz.

Inplikazio-erlazioa irudikatzeko, (A v B) eta (C v D) enuntziatuen diagramen ondoan zuzen horizontalak marrazten dira; bikote bana enuntziatuen parean. Orain beheko zuzena egiazkoa dela suposatuko dugu. Lau zuzen horizontal hauen artean inplikazioari dagozkion zubiak irudikatuko ditugu. Hauek lerro osoz; ez bait dago zalantzarik berauen baliozkotasunaz.

A v B gaiaren ordez gai bakuna bagenu, A esaterako, bere behin-behinekotasuna adierazteko \ (x-en erdia) ipiniko genuke egiazko zuzenean. Gero faltsua suertatuko balitz, ezabatu eta beste zuzenean x idatziko genuke. Berriz egiazkoa balitz, x bukatuko genuke.

6b) diagraman (B■ C) v A) enuntziatua azaltzen da.

Erlazio berdinez lotutako gai-katea bat irudika genezake katean agertzen diren gaiei dagozkien zuzenean



6. irudia.

0 biribila markatuz. Esate baterako, A■&B■D katearen diagrama 6c) irudian ikus daiteke.