Patxi Angulo

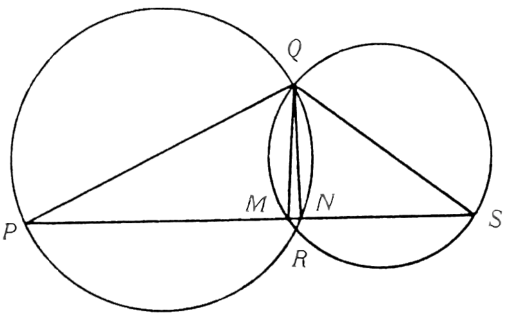
GEOMETRIAKO PARADOXAK

Aurreko ale batean paradoxen munduan sartu ginen probabilitatearen eskutik. Honetan *harrigarria* izan daitekeen paradoxa-bilduma bat aurkeztuko dugu. *Harrigarri* hitza ez dugu hemen alferrik erabili. Paradoxak berez harrigarriak badira ere, harrigarritasun hau normalean arrazonamenduetan kokatzen da, baina dakargun bilduma honetan arrazonamenduetan ezezik ikusmenean ere aurki dezakegu. Bilduma honi *paradoxa geometriko* izena eman geniezaioke; proposatutako enuntziatuen frogapenak nahiz kontzeptu geometrikoetan nahiz irudietan oinarritzen bait dira. Paradoxen gakoa irakurleen eskuetan utziko dugu oraingoz, ebazpenak beste ale baterako utziz. (Irakurleak nahi badu, bere ebazpenak bidal diezazkiguke).

Ekin diezaiogun bada, paradoxen planteamenduari.

1. paradoxa

Zuzen batekiko, kanpoko puntu batetik bi elkartzut marra daitezke.



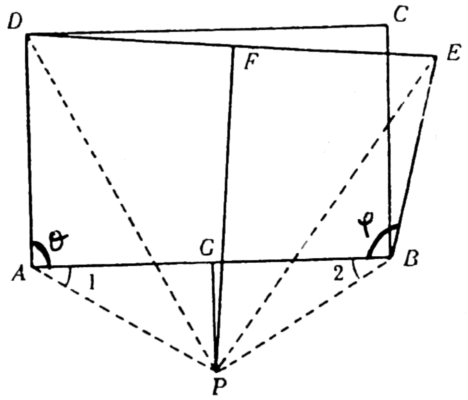
Marra ditzagun Q eta R puntuetan gurutzatzen diren bi zirkunferentzia. Q puntutik QP eta QS zirkunferentzien diametroak irudikatzen dira. Ondoren PS zuzenkia. Honek zirkunferentziak puntu banatan ebakitzen ditu; M eta N puntuetan alegia. (Ikusi irudia).

PNQ eta SMQ triangeluak zirkunferentzierdian inskribaturik daude, beren alde bat diametroa delarik. Hortaz PNQ eta SMQ angeluek zuzenak izan behar dutela ondorioztatzen da, edo gauza bera dena QM eta QN zuzenkiak PS zuzenkiarekiko elkartzutak direla, frogatu nahi genuenez.

2. paradoxa

Angelu zuzena eta angelu kamutsa berdinak dira.

Bedi ABCD edozein laukizuzen. B puntutik -BC luzerako BE zuzenkia marratuko dugu. AB eta DE zuzenkietako erdiko puntuetatik elkartzutak irudikatzen baditugu, hauek P puntuan gurutzatuko dira (Begiratu irudiari). P puntu honetatik abiatuz PA, PB, PD eta PE zuzenkiak eraikiko ditugu. DAP eta EBP triangeluetan DA eta BE aldeak berdinak dira, BE horrela

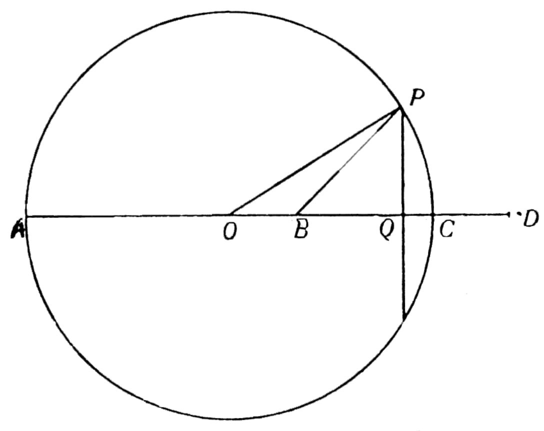


aukeratu dugulako. Baita PA = PB eta PD = PE ere; P puntua DE eta AB zuzenkietako erdiko puntutik pasatzen diren elkartzutetan bait dago, eta honek, alde batetik A eta B puntuetatik, eta bestetik D eta E puntuetatik, distantzikide dela esan nahi du.

Bi triangelu hauen aldeak hurrenez hurren berdinak direnez gero, triangeluek berdinak izan behar dute. Beraz DAP eta EBP angeluak berdinak dira. Beste aldetik PBA triangelua isoszelea denez gero (PA = PB da) 1 eta 2 angeluak berdinak dira. Hemendik, θ angelu zuzena eta angelu kamutsa berdinak direla ateratzen dugu.

3. paradoxa

Zirkulu bateko puntu guztiak bere zirkunferentzian daude.



Bedi B O zentrodun zirkuluko puntu bat. B puntutik AC diametroa marraztuko dugu. AC diametroa luzatuz D puntua hartuko dugu ondoko proportzioa bete dadin

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$$

Eraiki dezagun BD zuzenkiko erdiko puntutik QP elkartzuta, eta P puntutik PO eta PB zuzenkiak irudikatuko ditugu. Zirkuluaren erradioa r bada -AB = r + -OB eta -BC = r – -OB, -AD = r + -OD eta -DC = -OD – r. Berdintza hauek ordezkatuz, aurreko proportzioa

$$\frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}} = \frac{\overline{OD} + r}{\overline{OD} - r}$$

idatz dezakegu, edo (r + -OB) (-OD – r) = (-OD + r) (r – -OB). Eragiketak egin eta sinplifikatu ondoren -OB . -OD = r^2 lortzen dugu, eta irudiari begira -OB = -QB – -BQ eta -OD = -OQ + -QD direnez gero, (-OQ – -BQ) (-OQ + -QD) = r^2. Baina Q BD zuzenkiko erdiko puntua denez -BQ = -QD, azken berdintza hau aurrekoan ordezkatuz r^2 = -OQ^2 – -BQ^2 (1) aterako dugu.

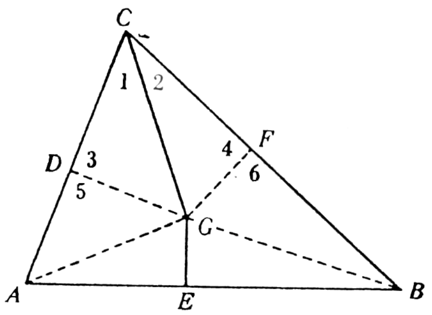
OQP eta BQP triangeluei Pitagoras-en teorema aplikatuz:

-OP^2 = -OQ^2 + -PQ^2
-BP^2 = -BQ^2 + -PQ^2

Orain bi berdintza hauen arteko kendura atalez atal kalkulatuz -OP^2 – -BP^2 = -OQ^2– -BQ^2, baina -OP = r denez gero r^2 – -BP^2 = -OQ^2 – -BQ^2. Berdintza hau (1) berdintzan ordezkatuz r^2 = r^2 – -BP^2 izango dugu edo -BP^2 = 0. Beraz B eta P puntuek bat etorri behar dute, hots, B puntuak zirkunferentzian egon behar du.

4. paradoxa

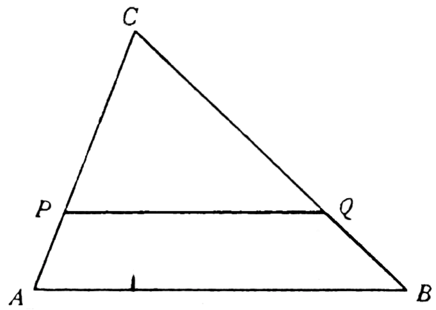
Triangelu oro isoszele da.



Bedi ABC triangelua. Marra ditzagun Cfl angeluaren erdikaria eta AB aldeko erdiko puntutik elkartzuta. Bi lerro hauek gurutzatzen diren G puntutik AC eta BC aldeekiko GD eta GF, hurrenez hurren, elkartzutak irudikatuko ditugu. Baita GA eta GB zuzenkiak ere. CGD eta CGF triangeluak berdinak dira, CG aldea komuna, 1fl = 2fl (eraiketa) eta 3fl = 4fl (zuzenak) direlako. Beraz -DG = -GF. GDA eta GFB triangeluetan 5fl = 6fl zuzenak, -AG = -BG (AGB triangelua isoszelea delako) eta gorago frogatu dugunez -DG = -GF. Beraz GDA eta GFB triangelu berdinak dira. Triangelu berdinen bikote hauetatik -CD = -CF eta -AD = -BF ondorioztatzen da. Berdintza hauek atalez atal batuz -AD + -CD = -BF + -CF edo -AC = -BC; hau da, triangelua isoszelea da.

5. paradoxa

Froga dezagun bi zuzenki desberdin berdinak direla.



Bedi ABC edozein triangelu, eta PQ AB aldearekiko zuzenki paralelo bat (ikus irudia). ABC eta PQC triangeluak antzekoak dira. Beraz

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$$

proportzioa betetzen da. Hortik -AB . -PC = -AC . -PQ. Bi atalak (-AB – -PQ)-z biderkatuz zera dugu:

-AB^2 . -PC – -AB . -PC . -PQ = -AC . -PQ . -AB – -AC . -PQ^2

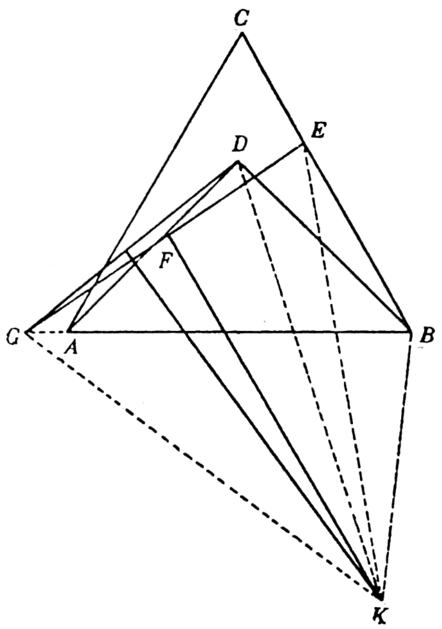
Berdintza honetan -AB . -PC . -PQ eta -AC . -PQ . -AB atalez atal aldatzen baditugu:

-AB^2 . -PC – -AC . -PQ . -AB = -AB . -PC . -PQ – -AC . -PQ^2 lortuko dugu. Orain -AB eta -PQ, hurrenez hurren, faktore komuna aterata -AB (-AB . -PC – -AC . -PQ) = -PQ (-AB . -PC – -AC . -PQ) lortuko da, eta (-AB . -PC – -AC . -PQ) bi ataletan sinplifikatuz, -AB = -PQ izango dugu.

6. paradoxa

Ikus dezagun 45° = 60° edo 3 = 4 direla. ABC triangelu aldekidearen AB aldea hipotenusa bezala erabiliz, eraiki dezagun ABD triangelu zuzen isoszelea. ABC = 60° eta ABD = 45° angeluak berdinak direla frogatuko dugu.

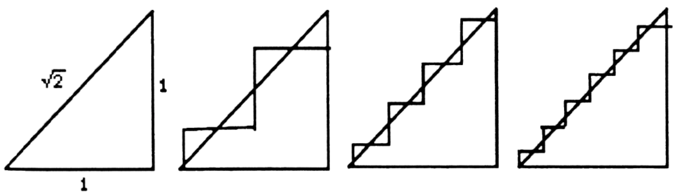
BC aldean -BD luzerako BE zuzenkia hartuko dugu. Bedi F, AD zuzenkiko erdiko puntua. Marra dezagun EF lerro zuzena AB aldearen luzapena G puntuan ebaki arte. G eta D puntuak zuzenki batez lotuko ditugu. Gero GD eta GE zuzenkietako erdiko puntuetatik zuzen elkartzut bana irudikatuko dugu. Bi zuzen hauek k puntuan elkar ebakiko dute. K puntu hau G, D, E eta B puntuekin lotuko dugu. (Ikus irudia). Oraingo eginkizuna KDB eta KBE triangeluak berdinak direla frogatzean datza. Izan ere, -KG = -KD eta -KG = -KE (KDG eta KGE triangelu isozeleak direlako). Beraz -KE = -KD. Bestalde -BE = -BD aukeratu dugu eta KB alde komuna da. Bi triangeluak, beraz, berdinak dira. Hori dela eta, elkarri dagoz-



kion angeluek berdinak izan behar dute, hau da, KBD eta KBE angeluak berdinak dira. Hauei zati komuna den KBA angelua kentzen badiegu, ABD eta ABE angeluak lortuko ditugu; bilatzen genituenak hain zuzen ere. Radianetan idatziz gero, $\pi/4 = \pi/3$ genuke, edo 3 = 4

7. paradoxa

Azken paradoxa honetan geometria eta analisia sartzen dira, eta analisiaren barruan *limite* kontzeptua hain zuzen ere. Ondoko irudi-segida honetan infinituan, hau da limitea hartzean, sortzen den arazoa agertzen da.



(a) (b) (c) (d)

(a) irudian ikusten dugunez gero, 1 unitateko katetuak dituen triangelu zuzen isoszele bat dago, bere hipotenusa $\sqrt{2}$ unitatekoa delarik. (b), (c), (d) irudietan lerro hautsiz osatutako segida baten lehenengo gaiak ikusten dira. Alde batetik lerro horiek hipotenusatik gero eta hurbilago daude. Bestela esan, hipotenusak eta lerroek gero eta antz handiagoa dute. Bestetik lerro hautsi guztien luzera 2 da. Prozedurari segituz gero, hurrengo lerroek ere luzera bera izango lukete. Hau da, irudiei jarraituz lerro hautsien limitea hipotenusa da. Luzerei jarraituz, ordea, lerro-limitearen luzera 2 da (luzeren segida konstantea delako). Hona hemen paradoxa: lerro-limitea hipotenusa da, baina hipotenusaren luzera ez da 2 ; $\sqrt{2}$ baizik. [redacted]