Dispertsio-uhin linealak

John Scott Russell ingeniari eskoziarrak Edinburgo inguruko kanal batean eginiko behaketak (1835) hartzen dira uhin bakartiaren lehen deskribapen idatzitzat. Kasu horretan, sakonera gutxiko kanaletan sorturiko uhina zen; eitea eta abiadura aldaketa barik mantentzen zuen itxuraz, baina abiada handiz hedatzen zen denbora-tarte oso luzean. Gertaera laborategian errepikatzeko gauza izan zen Russell eta uhinaren abiadura, altuera eta zabalera erlazionatuta zeudela ikusi zuen: altuera handiagorako abiadura ere handiagoa, baina zabalera txikiagoa.

60 urte pasa behar izan zuten eredu matematiko egokia aurkitzeko. Stokes (1847), Boussinesq (1872) eta Rayleig-en (1876) oinarrizko ekarpenen ondotik, Korteweg eta de Vries-ek (1895) beraien izena daraman ekuazioa proposatu zuten:

$$\eta_t + (c_0 + c_1\eta)\,\eta_x + \nu\eta_{xxx} = 0. \tag{1}$$

$\eta(x,t)$ funtzioak fluidoaren altuera x puntuan eta t denboran oreka-egoeratik zenbat desbideratu den neurtzen du. Problemaren konstante fisikoak c_0, c_1 eta ν dira. Erraz ikusten da

$$\eta = a\,\mathrm{sech}^2\left(\left(\frac{c_1 a}{12\nu}\right)^{1/2}(x-Ut)\right), \qquad U = c_0 + \frac{1}{3}\,c_1 a \tag{2}$$

funtzioak (1) ekuazioaren ebazpenak direla, $a>0$ edozein delarik, Russell-en behaketak egiaztatuz. Aipaturiko uhin bakartiaren existentzia oreka zehatz baten eragina da, hirugarren deribatua daraman gaiak sortzen duen dispertsioa eta elkarrekintza ez-linealak eragindako talka edo kontzentrazioaren artekoa, hain zuzen.

Mende honen bigarren erdian, Kruskal eta Zabusky-k (1965) KdV ekuazioa (honela deitzen baita (1) ekuazioa) lortu zuten elkarrekintza ez-lineal ahula duen N malgukiz osaturiko sare dimentsiobakar baten limite jarrai bezala, Fermi, Pasta eta Ulam-ek (1955) proposaturiko ereduaren arabera. Elkarrekintza koadratikoa denean KdV ateratzen da zehazki. Kubikoa denean $\eta\eta_x$ gaiaren ordez, $\eta^2\eta_x$ idatzi behar da. Ekuazio berriari KdV aldatua deritzo (mKdV). Hasierako datu sinpleak hartuz ($\eta(x,0) = a\cos(2\pi x)$) zenbakizko saioak egin zituzten, eta denbora-tarte bat pasa ondoren zenbait "uhin bakartik" osatzen duten uhin-tren bat agertzen dela ikusi zuten, hauen anplitudeak eta, ondorioz, abiadurak desberdinak direlarik. Inguruko baldintzak periodikoak izanik, uhin hauek elkarren aurka jotzen dute eta, hau bai harrigarria, talken ondoren bidea jarraitzen dute ia-ia hau gertatu ez bailitzan. Esan nahi baita, elkarrekintza lineala bailitzan. "Solitoi" berba asmatu zuten ebazpen-mota berri honetarako. Gainera, Fermi, Pasta eta Ulam-ek ia periodikotasunezko fenomeno gisa nabarmendu zutena ere ikusi zuten.

Hauxe izan zen gaur arte bizi-bizi mantendu den ikerketa-alor berri baten hasiera. Erabakiorra izan da horren bilakaeran Miurak aurkitu zuen transformazioa, KdV eta mKdV-ren ebazpenak erlazionatuz (zehatzago esateko, eboluzioak aldatu gabe gordetzen dituen kantitateak infinituak direla ikus daiteke). Bestalde, bai KdV eta bai mKdV ekuazio "kanonikotzat" hartzen dira gaur egun, zenbait eredu fisikoren hurbilketa modura agertzen direlarik, eta ez bakarrik sakonera gutxiko kanaletako uhinen dinamikan. Bibliografiako [1] liburua ikus daiteke gai hauetarako eta aurreko emaitzen erreferentzia bezala.

Hala ere, ez dugu ahaztu behar ekuazioak eredu matematikoak baino ez direla eta jatorrizko problema fisikoaren sinplifikazio gordina direla. Ez dago argi, beraz, prozedura honekin ez ote dugun funtsezko informazioa galdu. Hasierako datuen arrazoizko multzo baterako eredu matematiko horrek ebazpena izatea ere ez dago aldez aurretik bermatuta. Ezta, ebazpena duenean ere, hori bakarra izatea eta hasierako datuen neurketa-errore txikien aurrean portaera zuzena duenik ziurtatzea. Alor honetan egin dugu lan C. E. Kenig (University of Chicago) eta G. Ponce (University of California, Santa Barbara) irakasleekin, eta 1989. urtean hasitako zenbait lanetan gai hauek aztertzeko teknikak garatu ditugu.

Bai KdV eta bai mKdV ekuazioak, lotuta daukaten problema linealaren perturbazio "txikitzat" jo behar dira. Hala ere, ez dago argi txikitasun hori nola neurtu behar den. Esan nahi baita, zer den txiki eta zer handi neurtzeko eta erabakitzeko tresnak dagokion deribatu partzialetako ekuazioan aurkitu behar dira. Edo beste modu batez esateko, problemaren parametro nabarmena zein den aurkitu behar da.

Gure ikerketaren arabera hau izan daiteke gakoa: (2) formulak ematen duen uhin bakartiaren hasierako profila, asko oszilatzen duen faktore batekin ($\cos Nx$ erakoarekin, $N>1$) eta behar bezain txikia den $A(N)$ anplitudearekin perturbatzea. Orduan, hasierako datua

$$\eta = A(N)\cos(Nx)\,\mathrm{sech}^2(x\text{-}t/3), \tag{3}$$

izango da KdV ekuaziorako, eta antzeko zerbait (sech^2-ren lekuan sech jarrita) mKdV-rako, konstanteen balio partikular egokiak hartuta adierazpena errazteko. [3] lanean, eta mKdV-rako, ikusi dugu

$$A(N) < N^{1/4} \tag{4}$$

denean, ebazpenak uniformeki bornatuta daudela. KdV ekuaziorako emaitza txarragoa zen. Hau, ordea, Princeton-eko

eta ez-linealak

- **Proiektuaren izenburua:** Dispertsio-uhin linealak eta ez-linealak.
- **Proiektuaren helburua:** dispertsio-ekuazioen Cauchy-ren problema, hasierako datuen eta ebazpenen erregulartasuna, ebazpenen ezegonkortasuna.
- **Zuzendaria:** Luis Vega Gonzalez
- **Lan-taldea:** Susana Gutierrez de Gracia eta M. Cruz Vilela Bendaña (EHU); kanpoko laguntzaileak: Carlos E. Kenig (University of Chicago) eta Gustavo Ponce (University of California, Santa Barbara)
- **Saila:** Matematika
- **Fakultatea:** Zientzi Fakultatea

Institute for Advanced Study-ko J. Bourgain irakasleak zuzendu zuen, KdVrako *A(N)<1* nahikoa zela erakutsiz. Honetarako teknika berriak asmatu zituen eta hauek oso erabilgarriak suertatu dira deribatu partzialetako beste ekuazio batzuetan ere. Bereziki, Fermi, Pasta eta Ulam-ek zenbakizko metodoen bitartez ikusiriko ia-periodikotasuna zehatz-mehatz frogatu zuen.

Harrigarria bada ere, Bourgain-en emaitza hobe daiteke. [4] lanean erakutsi dugu anplitudea hazi ere egin daitekeela. Zehazki, nahikoa da

$$A(N) < N^{-p}\ ,\ p > 3/4 \qquad (5)$$

Emaitza honek adostasun handiagoa du mKdV-rako ezagutzen dugun (4) baldintzarekin, bien arteko diferentzia unitate batekoa baita, Miuraren transformazioak iradoki bezala.

Duela gutxi frogatu dugu (4) hobezina dela (oso posible da beraz, (5) ere hala izatea). Zehatzago esateko, (2) formulak duen *a* parametroa erabiliz ebazpen berriak lortu ditugu eta propietate interesgarriak dituzte. Alde batetik, dispertsio-portaera duen hondar-masa bat kenduta, (1)-en agertzen den uhin bakartiaren aurkako norabidean higitzen diren uhinak dira. Bestetik, *N* eta *a* parametroekin jokatuz, (4) baldintzan dagoen 1/4 berretzailearen ordez txikiago bat jarriz gero, menpekotasun jarraiaren uniformitatea galdu egiten da eta, beraz, ezegonkortasuna dagoela erakusten dugu.

Ebazpen berri hauek Schrödinger-en ekuazio erdilinealerako ezagunak diren beste batzuen generalizazioa dira. Ekuazioa

$$iu_t = u_{xx} + |u|^2 u \qquad (6)$$

da, kanonikoa hau ere eta mKdV-arekiko erlazio estua du, nahiz eta ez den oraindik ondo ulertzen, gure ustez. Esate baterako, sekante hiperbolikoa profiltzat duten uhin bakartiak ekuazio bien ebazpenak dira. Gainera, (6) ekuazioak solitoiak ditu eta kontserbazio-legeak kopuru infinituan ditu. Eta aparteko propietate bat ere badu, Galileoren transformazioekiko aldaezintasuna, hain zuzen ere. Honen bitartez, $e^{iNx} u_0$ datuari dagokion ebazpena, u_0 datuari dagokionaren arabera idatz daiteke. Beraz, mKdV-rako frogatu dugun ezegonkortasun berbera ondorioztatzen da (6)-rako. Fisikaren ikuspuntutik ezegonkortasun honen esanahia zein den berez datorren galdera da; kontuan hartu behar baita (6) hainbat alorreko eredu fisikoen hurbilketa modura agertzen dela, optika ez-linealean eta fluidoen mekanikan, adibidez. Zehatzago esateko eta Hasimotoren transformazioaren bitartez, "vortex filament" baten eboluzioari lotuta dago eta, ferromagnetismoan, Heisenberg-en katearen limite jarraia da. Uhin bakarti honek azken lotura, Bernoulli-ren "kurba elastikoaren" problema klasikoarekin du: (6) ekuazioaren *u* ebazpena ematen duen zenbaki konplexua era polarrean idatziz moduluak kurbadura ematen du, eta argumentua tortsioaren jatorrizko funtzioa da.

Amaitzeko, baliteke ebazpen berri hauen ezegonkortasunak beste arazo bat argitzeko balio izatea. Itzul gaitezen KdV ekuaziora eta har dezagun dispertsioa neurtzen duen ν konstante fisikoa. Lehenago esan dugunez, parametro honen balioa zero denean ereduak talka-uhinak sor ditzake (aski da beherakorrak ez diren hasierako datuak hartzea). Talken ondoko ebazpena jarraitzeko modua ez da bakarra. Horregatik eredu fisikora itzuli behar da eta entropia erabili, fisikoki esanguratsua den ebazpena hautatzeko. Bakartasun ezaren problemari erantzuteko beste modu bat hau da: ν-ren balioetarako (2) ekuazioa ebatzi ondoren, limitea hartu. Ebazpen "entropikoaren" eta "dispertsio nulukoaren" arteko erlazioa ez dago ondo argituta. Gorago aipatu ditugun ebazpen berrien *N* eta *a* parametroekin jokatuz, ν dispertsioa alda dezakegula ere ohartarazi nahi dugu.

Luis Vega

ERREFERENTZIAK

1. A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (SIAM, ed.), 1985.
2. J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations,* Geometric and Functional Anal. **3** (1993), 107-156, 209-262.
3. C.E. Kening, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle,* Comm. Pure Apple. Math. **46** (1993), 527-620.
4. C.E. Kening, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation,* Journal Amer. Math. Soc. **9** (1996), 573-603.