

MATHEMATICA (eta IV)

Elena Lazkano eta Patxi Angulo*

Artikulu honekin amaitutzat emango dugu Mathematica programaren sarrera gisa antolatutako dugun adibide-sorta hau. Ariketak kalkulu matematikoaren arloa mugatu baditugu ere, gogoratu matrizeak erabiltzeko, ekuazio-sistemak ebazteko eta beste hainbat gauzetarako ere tresna egokia dela Mathematica. Baliokoak izango zitzaizkizulakoan, hona hemen azken adibidea.

4. Bi gainazalek mugatutako bolumena

• Enuntziatua

Espazioan bi gainazalek mugatzen duten bolumena kalkulatu dugu oraingoan. Horretarako, integral bikoitza erabiliko dugu. Integralen mugak zehazteko, gainazalen proiektzioak ikuspuntu desberdinetatik irudikatuko ditugu.

• Ebazpenaren urratsak

Lehendabizi, funtzioaren mutur arruntak kalkulatu ditugu, gero, mutur baldintzatuekin alderatu ahal izateko. Mutur baldintzatuak Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz kalkulatu ditugu.

• Erabiliko diren aginduak

ParametricPlot3D: hiru dimentsioko grafikoa egiten du ekuazio parametrikotatik abiatuta. Funtzio bezala adierazi ezin diren gainazalak irudikatuzko erabiltzen da.

ViewPoint: hiru dimentsioko irudia ikuspuntu jakin batetik bistaritzen du.

DisplayFunction: grafikoa bistaratzeko edo ezkutuan mantentzeko aukera da.

Show: osagai grafikoak bistaratu ditu.

Graphics: ematen zaion datua irudika daitekeen elementu bihurtuko du.

Circle: zentroa eta erradioa emanez, zirkunferentzia irudikatzen du.

Disk: zentroa eta erradioa emanez, zirkulua irudikatzen du.

Rectangle: behe-ekzter eta goi-eskuin erpinak emanez errektangelua irudikatzen du.

RGBColor: grafiko baten irudiaren kolorea.

Axes: grafikoaren ardatzak irudikatu ala ez adierazteko ezaugarria da.

AspectRatio: grafikoaren ardatzen arteko proportzioa adierazteko ezaugarria da.

ViewPoint: hiru dimentsioko irudia ikuspuntu jakin batetik bistaritzen du.

Integrate: integrala kalkulatu du. Bi aldagai emanez, integral bikoitza kalkulatu du.

Simplify: adierazpen algebraiko bat sinplifikatu du.

%: aurreko emaitzari erreferentzia egiten dio.

• Ebazpena Mathematica-ren bidez

Ekuazio kartesiarrak:

$$\text{esfera: } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad \text{zilindroa: } x^2 + y^2 - 2y = 0,$$

Ekuazio parametrikokoak:

$$\begin{aligned} \text{esfera: } x &= 2\cos[t] \cos[v], & \text{zilindroa: } x &= 2\sin[t] \cos[t], \\ y &= 2\sin[t] \cos[v], & y &= 2\sin[t]^2, \\ z &= 2\sin[v], & z &= z \end{aligned}$$

Hiru dimentsioko irudia:

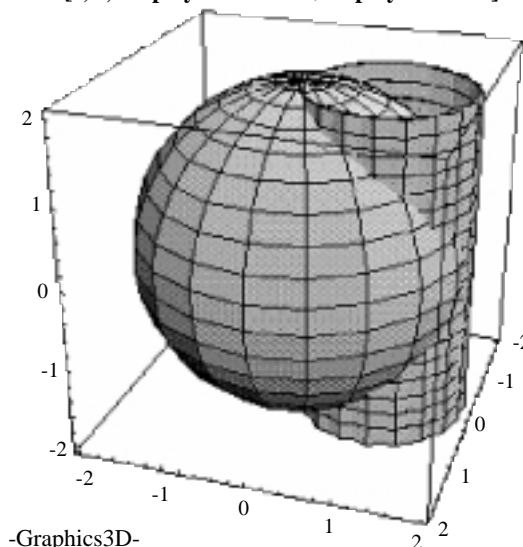
```
e = ParametricPlot3D[{2cos[t]cos[v], 2sin[t]cos[v],
2sin[v]}, {t,0,2pi}, {v,-pi/2,pi/2}, ViewPoint->{3,1,1.5},
DisplayFunction -> Identity]
```

-Graphics3D-

```
z = ParametricPlot3D[ {2sin[t]cos[t],2sin[t]^2,z},
{t,0,2pi}, {z,-2,2}, ViewPoint -> {3,1,1.5},
DisplayFunction -> Identity]
```

-Graphics3D-

```
Show[e, z, DisplayFunction:> $DisplayFunction]
```



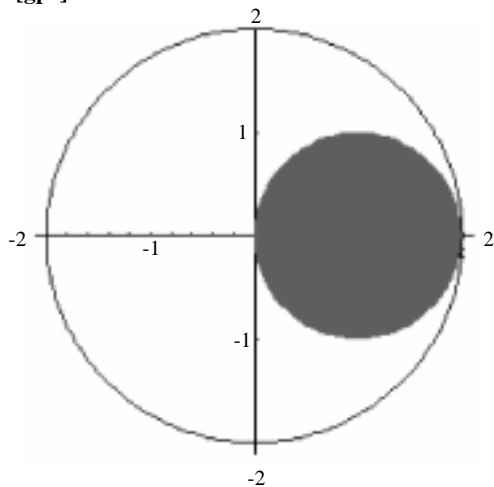
-Graphics3D-

Goitiko proiektzioa:

```
gpr=Graphics[{Circle[{0,0},2], {RGBColor[1,0,0],
  Disk[{1,0},1]}, Axes → True,
  AspectRatio → Automatic]
```

-Graphics3D-

Show[gpr]



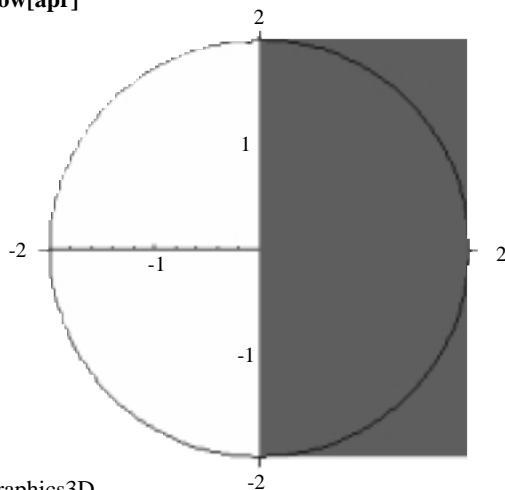
-Graphics3D-

Aurretiko proiektzioa:

```
apr=Graphics[{{RGBColor[1,0,0],
  Rectangle[{0,-2},{2,2]}, Circle[{0,0},2]},
  Axes->True, AspectRatio->Automatic]
```

-Graphics3D-

Show[apr]



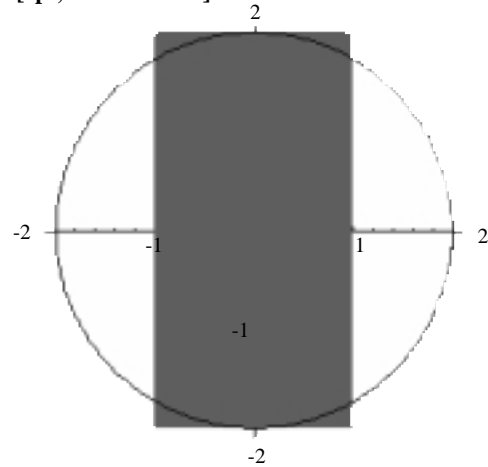
-Graphics3D-

Eskuinetiko proiektzioa:

```
epr=Graphics[{{RGBColor[1,0,0],
  Rectangle[{-1,-2},{1,2]}, Circle[{0,0},2]},
  Axes → True, AspectRatio → Automatic]
```

-Graphics3D-

Show[epr, Axes → True]



-Graphics3D-

Integral bikoitza:

Integralen mugak koordinatu cartesianarretan:

$$y \in [0, 2], \quad x \in [-\sqrt{(2y - y^2)}, \sqrt{(2y - y^2)}]$$

$$\text{integrakizuna: } z = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)}.$$

Integralen mugak koordinatu zilindrikoetan:

$$t \in [0, \pi], \quad r \in [0, 2\sin[t]],$$

$$\text{integrakizuna } z = r * \sqrt{(4 - r^2)}$$

Oharra: muga horiekin bolumenaren goiko erdia soilik kalkulatuko dugu.

```
Integrate[r*Sqrt[4-r^2],{t,0,π},{r,0,2sin[t]]
```

$$8\pi/3 + 4/9 (-4 + 3\pi) - 4/9 (4 + 3\pi)$$

```
Simplify[%]
```

$$8/9 (-4 + 3\pi)$$

Hori, bolumenaren goiko erdia da. Beraz, bolumen osoa:

$$2 * \%$$

$$16/9 (-4 + 3\pi)$$

• Iruzkinak

Lehendabizi, hiru dimentsioko irudia egin dugu bolumenaren ideia hartzeko. Horretarako, ohikoak diren **ParametricPlot3D** eta **Show** aginduak erabili ditugu eta ikuspuntu estandarra aukeratu dugu **ViewPoint** ezaugarriaren bidez. Ondoren, bolumenaren hiru proiektzioak, goitikoa, aurretikoa eta eskuinetikoa, irudikatu ditugu **Disk**, **Rectangle**, **Circle**, **Graphics** eta **Show** aginduak erabiliz. Bertan ere **DisplayFunction**, **RGBColor**, **AspectRatio** eta **Axes** aukeretaz baliatu gara. Azkenik, integral bikoitza kalkulatu dugu **Integrate** aginduarekin eta emaitza sinplifikatu dugu **Simplify**-ren bidez. Horrela, bolumenaren erdia lortu dugu. Bolumen osoa lortzeko, aurreko emaitza (%) bider bi egin dugu.



* EHUko irakasleak