MATHEMATICA (III)

Elena Lazkano eta Patxi Angulo*

3. Funtzio baten mutur baldintzatuak

• *Enuntziatua*

Askotan, funtzio baten muturrak kalkulatzerakoan, mutur horiek bete behar dituzten baldintzak ematen dizkigute. Hau da, emaitza batzuk bakarrik onartu beharko ditugu. Ondorengo adibidean, funtzio jakin baten mutur baldintzatuak *Mathematica* erabiliz nola kalkula daitezkeen ikusiko dugu.

• *Ebazpenaren urratsak*

Lehendabizi, funtzioaren mutur arruntak kalkulatuko ditugu, gero, mutur baldintzatuekin alderatu ahal izateko. Mutur baldintzatuak Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz kalkulatuko ditugu.

• *Erabiliko diren aginduak*

D: funtzio baten deribatua kalkulatzen du, emandako aldagaiarekiko.
Solve: ekuazioak ebazteko agindua da.
Union: zerrenden bildura egiten du, elementu errepikatuak ezabatuz.
/.: ezkerreko espresioari eskuinean adierazten zaion erregela edo erregela-multzoa aplikatzen dio.
Plot3D: funtzio baten hiru dimentsioko irudia egiten du.
ViewPoint: hiru dimentsioko irudia ikuspuntu jakin batetik bistaratzen du.
AspecRatio: grafikoaren ardatzen arteko proportzioa adierazteko aukera da.
DisplayFunction: grafikoa bistaratzerko ala ez aukera ematen du.
PlotRange: funtzioaren balioak grafikoan mugatzeko aukera ematen du.
Axes: grafikoen ardatzak irudikatu ala ez adierazteko ezaugarria da.
Boxed: hiru dimentsioko irudietan kutxa irudikatzen du.
RGBColor: grafiko baten irudiaren kolorea aukeratzeko balio du.
PointSize: puntuak irudian edukiko duen tamaina adierazten du.
Point: bi edo hiru elementuko zerrendak plano edo espazioko puntu bati egokitzen dizkio.
Show: osagai grafikoak bistaratzen ditu.
ParametricPlot3D: hiru dimentsioko grafikoa egiten du ekuazio parametrikoetatik abiatuta. Funtzio bezala adierazi ezin diren gainazalak irudikatzeko erabiltzen da.
BoxRatios: hiru dimentsioko grafikoen ardatzen arteko proportzioak adierazteko aukera da.
ContourPlot: hiru dimentsioko irudi baten maila-kurbak irudikatzen ditu.
ParametricPlot: bi dimentsioko grafikoa egiten du ekuazio parametrikoetatik abiatuta. Funtzio bezala adierazi ezin diren kurbak irudikatzeko erabiltzen da.
PlotStyle: irudiaren ezaugarri batzuk definitzeko aukera ematen du.
Graphics: ematen zaion datua irudika daitekeen elementu bihurtzen du.
Polygon: emandako puntuak poligono baten bidez lotzen ditu.

• *Ebazpena* Mathematica-*ren bidez*

g[x_, y_]:= $y^3 + x^2 y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$

Mutur arruntak:

d1[x_,y_]:=D[g[x,y],x]
d2[x_,y_]:=D[g[x,y],y]

punegon=Solve[{d1[x,y]==0,d2[x,y]==0},{x,y}]
punegon=Union[punegon]

$\{\{x \to 0, y \to -2\}, \{x \to 0, y \to -2\}, \{x \to 0, y \to -2\}, \{x \to 0, y \to 2/3\}\}$
$\{\{x \to 0, y \to -2\}, \{x \to 0, y \to 2/3\}\}$

d11[x_,y_]:=D[g[x,y],{x,2}]
d22[x_,y_]:=D[g[x,y],{y,2}]

d12[x_,y_]:=D[g[x,y],x,y]

h1[x_,y_]:=d11[x,y]
h2[x_,y_]:=d11[x,y]d22[x,y]-d12[x,y]^2

hess={1,h1[x,y],h2[x,y]}
hess /. punegon

{1, 4 + 2 y, -4 x^2 + (4 + 2y) (4 + 6y)}
{{1, 0, 0}, {1, 16/3, 128/3}}

Lehenengo puntuan, (0,-2), zer gertatzen den ez digu esaten metodo honek, segidaren gai batzuk zero direlako. Beraz, ezin dugu erabaki puntu horren izaera. Bigarren puntuan aldiz, (0,2/3), funtzioak minimo erlatiboa du hessearren segidaren gai guztiak positiboak direlako.

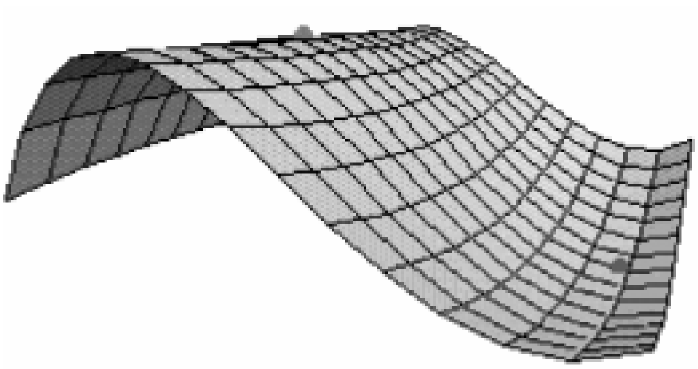
p0=Plot3D[g[x,y], {x,-1,1}, {y,-3,1},
ViewPoint $\rightarrow$ {1,0.5,0.25}, AspectRatio $\rightarrow$ Automatic, DisplayFunction $\rightarrow$ Identity, PlotRange $\rightarrow$ All, Axes $\rightarrow$ False, Boxed $\rightarrow$ False]

-SurfaceGraphics-

mut=Graphics3D[{{RGBColor[0.5,0,0.5], PointSize[0.03], Point[{0,-2,g[0,-2]}]}, {RGBColor[1,0,0], PointSize[0.03], Point[{0,2/3,g[0,2/3]+0.1}]}}]

-Graphics3D-

Show[p0, mut, DisplayFunction:>$DisplayFunction]



-Graphics3D-

Mutur baldintzatuak:

Baldintza: $x^2+y^2=1$

F[x_,y_]:=g[x,y]+λ(x^2+y^2-1)

d1F[x_,y_]:=D[F[x,y],x]
d2F[x_,y_]:=D[F[x,y],y]
d11F[x_,y_]:=D[F[x,y],{x,2}]
d22F[x_,y_]:=D[F[x,y],{y,2}]
d12F[x_,y_]:=D[F[x,y],x,y]

pungel=Solve[{d1F[x,y]==0,d2F[x,y]==0,x^2+y^2==1}, {x,y, λ}]

{{$\lambda \rightarrow$ -(5/2), x $\rightarrow$ 0, y $\rightarrow$ -1},
{$\lambda \rightarrow$ -(3/2), x $\rightarrow$ 0, y $\rightarrow$ 1}}

h1F[x_,y_]:=d11F[x,y]
h2F[x_,y_]:=d11F[x,y]d22F[x,y]-d12F[x,y]^2

hessF={1,h1F[x,y],h2F[x,y]}

{1, 4 + 2y + 2λ, -4 x^2 + (4 + 2y + 2λ) (4 + 6y + 2λ)}

hessF /. pungel

{{1,-3,21},{1,3,21}}

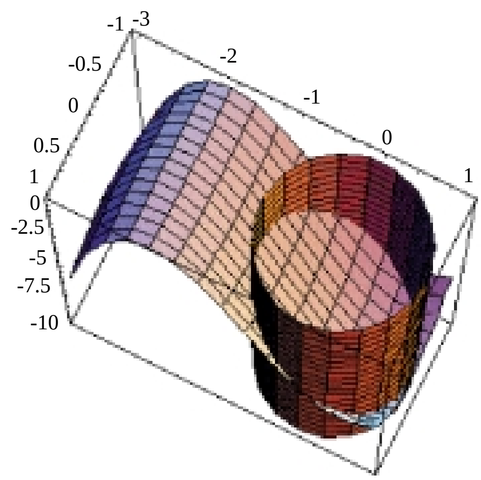
Beraz, lehenengo puntuan, (0,-1), minimoa du eta bigarrenean, (0,1), maximoa, hessearren segidaren gaien zeinuen arabera.

zi=ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], z}, {t,0,2π}, {z,-10,0}, BoxRatios $\rightarrow$ Automatic, DisplayFunction $\rightarrow$ Identity]

-Graphics3D-

p1=Plot3D[g[x,y],{x,-1,1},{y,-3,1}, BoxRatios $\rightarrow$ Automatic, DisplayFunction $\rightarrow$ Identity]

Show[p1, zi, DisplayFunction:>$DisplayFunction, ViewPoint $\rightarrow$ {1,0.5,8}]



-Graphics3D-

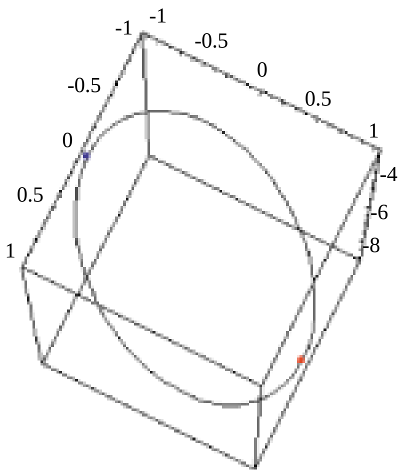
ps1=Graphics3D[{{RGBColor[1,0,0], PointSize[0.025], Point[{0,1,-9}]}, {RGBColor[0,0,1], PointSize[0.025], Point[{0,-1,-3}]}}]

-Graphics3D-

**mb1=ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], -3Sin[t]-6},
{t,0,2π}, ViewPoint → {1,.0.5,8},
DisplayFunction → Identity]**

-Graphics3D-

Show[mb1, ps1, DisplayFunction:>$DisplayFunction]



-Graphics3D-

**kp2=ContourPlot[g[x,y], {x,-2.5,2.5}, {y,-3,1},
AspectRatio → Automatic,
DisplayFunction → Identity]**

-ContourGraphics-

**mb2=ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t,0,2 π},
PlotStyle → RGBColor[0,1,0],
AspectRatio → Automatic,
DisplayFunctio**n → **Identity]**

-Graphics-

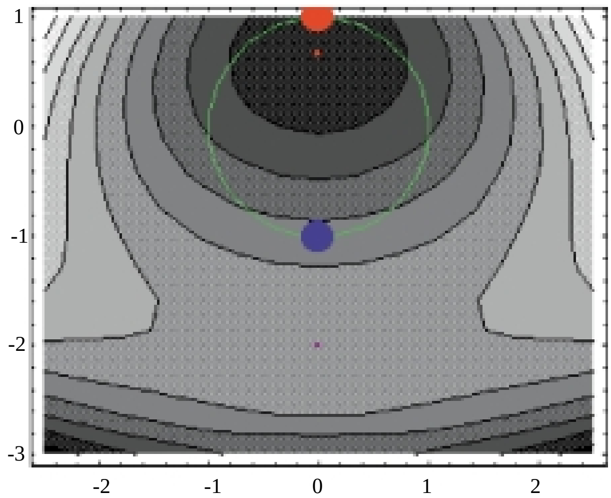
**ps2=Graphics[{{RGBColor[1,0,0], PointSize[0.06],
Point[{0,1}]}, {RGBColor[0,0,1], PointSize[0.06],
Point[{0,-1}]}}]**

-Graphics-

**mut2=Graphics[{{RGBColor[0.5,0,0.5],
Polygon[{{-0.025,-2.025},{-0.025,-1.975},
{0.025,-1.975},{0.025,-2.025},
{-0.025,-2.025}}]},{RGBColor[1,0,0],
Polygon[{{-0.025,2/3-0.025},
{-0.025,2/3+0.025},{0.025,2/3+0.025},
{0.025,2/3-0.025}, {-0.025,2/3-0.025}}]}}]**

-Graphics-

**Show[kp2, mb2, mut2, ps2,
DisplayFunction:>$DisplayFunction]**



-Graphics-

• *Iruzkinak*

Lehendabizi, mutur arruntak kalkulatu ditugu ohizko metodoaren bidez. Hau da, **D** agindua erabiliz lehenengo deribatu partzialak kalkulatu ditugu eta zerorekin berdinduz sortzen den ekuazio-sistema ebatzi **Solve**-ren bidez. **Union** agindua erabili dugu sistemaren soluzio errepikatuak ezabatzeko. Azkenik, bigarren deribatu partzialekin hessearren segida osatu dugu eta puntu bakoitzari dagokion segidaren arabera, muturrak nolakoak diren erabaki dugu. **Plot3D**, **Graphics3D** eta **Show** aginduekin egindako irudian bereiz daitezkeenak dira mutur horiek.
Bigarren atalean Lagrange-ren metodoa erabili dugu mutur baldintzatuak kalkulatzeko. Horretarako, **D** eta **Solve** aginduez baliatu gara lehen bezala. Gero, funtzioaren eta baldintzaren hiru dimentsioko irudiak egin ditugu, **Plot3D** eta **ParametricPlot3D** erabiliz. Beherago, funtzioa eta baldintzaren arteko ebakidura-kurba eta topatutako puntuak irudikatu ditugu **Graphics3D**, **ParametricPlot3D**, **Point** eta **Show** aginduekin.
Azkenik, funtzioaren eta baldintzaren goitiko proiekzioa egin dugu (**ContourPlot**) eta bertan, mutur arruntak (**Polygon**, karratua) eta baldintzatuak (**Point**, zirkulua) kokatu ditugu.

*** EHUko irakasleak**

Oharra: *grafikoak zuri-beltzez ikusten badituzu ere, koloretakoak dira. Egizu proba eta ikusiko duzu zein nolako koloreak dituen gainera.*