

CANTOR eta INFINITUAREN IZUA

GUILLERMO ROA ZUBIA
Elhuyar Zientziaren Komunikazioa

Matematikak ez du sarritan eragin beldurra. Jende asko uxatu du, eta ulertezina eta aspergarria izateko ospea du, baina nekez eragiten du beldurra. Hala ere, gertatu izan da. Georg Cantor matematikari ospetsuak beldurra gainditu behar izan zuen ikerketari eusteko, eta, gaur egun, matematikaren historiaren parte da horregatik. Ikergeia, infinitua.

Matematikako infinituak ez du oso itxura beldurgarria; kalkuluetan gutxitan azaltzen den zortzi etzanaren itxurako sinbolo bat da. Baina, sinboloaz haratago joanda, kontzeptua bera da iluna eta ikaratzekoa.

Praktikan, infinitua ez da batere beldurgarria sistema zikliko baten bitartez sortzen denean. Adibide bat: Lurraren gaineko bidaia bat infinitua izan daiteke planeta bera ez delako inon bukatzen; eta beste bat: zinta magnetiko baten bi muturrak elkarri lotuta, bukatzen ez den zinta bat osatzen dute, eta bideoa etengabe grabatzeko erabil daiteke (bira bakoitzean aurreko birakoa ezabatuta).

Baina ziklikoa ez den infinituak ihes egingen dio intuizioari. Azken batean, gizaki hilkorren munduan denak du bukaera bat. Eta infinituaren kontzeptua, hain zuzen, ez da bukatzen. Zenbat zenbaki daude? Jakina, infinitu. Baina zer esan nahi

Cantorren ikerketa erlijioaren eremuaren atarira iritsi zen, edo barnera, infinituaren eta Jainkoaren kontzeptuek zerikusi handia baitute.

du horrek? Ez da intuizioz uler daitekeen kontzeptua. Jakin badakigu infinitu zenbaki dagoela, baina ezin dugu imajinatu kontzeptua errealtatean. Intuiziotik haratago joan behar da ulertzen hasteko. Georg Cantor abiatu zen intuizioaz haratago bidaia horretan, eta ospitale psikiatriko batean hil zen, garaiko matematika-

ri askoren kritiken artean eta zalantza filosofikoz beteta. Baina zientzialari handia izan zen, infinituaren bidea ireki baitzuen.

Infinitua matematikoki definitu zuen Cantorrek. Ez zen nahikoa jakitea infinitu zenbaki daudela; Cantorrek frogatu egin zuen hori egia dela, alegia, zenbakien multzoak infinitu elementu dituela.

Horretarako, multzo finituak aztertu zitu. Hiru elementuko bi multzorekin erraz ulertzen da. 1, 2 eta 3 zenbakiak dituen multzoa, eta 4, 5 eta 6 zenbakien multzoa, adibidez. Eragiketa simple baten bitartez, lehen multzoko zenbaki bat eta bigarreneko beste bat lot daitezke. Eragiketa hori elementu guztiekin eginda, bikoteka bil ditzakegu elementu guztiak (1 eta 4, 2 eta 5, 3 eta 6). Ez dago elementurik faltan edo soberan, eta banan-bananako loturak daude. Cantorrek esaten du horrek frogatzen duela bi multzok elementu-kopuru bera dutela. Oso multzo handiekin gauza bera eginez gero, jakin daiteke bi multzok elementu kopuru bera duten edo ez, kopuru hori zenbatekoa den jakin gabe.

Bada, infinituaren definizioan horixe bera erabili zuen. Zenbaki naturalen multzoa hartu (1, 2, 3...), eta zenbaki bikoitien multzoarekin (2, 4, 6...) banan-banako lotura egin zitekeela ikusi zuen. Ez du inporta zenbat elementu diren; bikotekako lotura egin daiteke, elementurik sobran edo faltan geratu gabe. Badakigu bigarren multzoa lehenengoaren azpimultzoa dela, eta, hala ere, egin daiteke. Cantorrek esan zuen, hain zuzen ere, infinitu elementuko multzoekin bakarrik gertatzen dela hori, eta horrela geratu zen definituta infinitua.

INFINITU BERRIAK

Benetako iraultza etorri zen pauso bat haratago joan zelako: proposatu zuen infinitu guztiak ez direla berdinak. Infinitu batzuk handiagoak dira beste batzuk baino. Adibidez, zenbaki naturalen multzoak

zenbaki gutxiago ditu zenbaki errealeak baino. Zenbaki naturalak 1, 2, 3 eta abar dira; zenbaki errealeen multzoan, aldiz, dezimalak dituzten zenbakiak ere sartzen dira. Hortaz, zenbaki errealeen infinitua handiagoa da zenbaki naturalena baino.

Zenbat zenbaki natural daude? Bada, Cantorrek izen bat eman zion kopuru infinitu horri: Aleph-0. Zenbaki bat da, baina, multzo infinitu batetik sortutakoa denez, zenbaki transfinitu bat da. Jakina, edozein zenbaki natural baino handiagoa da Aleph-0, baina beste zenbaki transfinitu batzuk baino txikiagoa.

Adibidez, zenbaki errealeen kopurua, Aleph-1, handiagoa da. Eta ez da handiagoa bakarrik; gainera, beste mota bateko infinitua da, zenbaki errealeak ezin baitira

kontatu, ez dira zenbakigarriak (zenbaki naturalak, ordea, bai).

Cantor ikaratuta zegoen. Zenbaki transfinituen aritmetika oso bat sortu zuen; hurrengo urrats logikoa zen infinitua ikeretzea, baina urrutiegi iritsi zela uste zuen. Erligioaren eremuaren atarian zegoen, edo barnean, infinituaren eta Jainkoaren kontzeptuek zerikusi handia baitute. Kritika asko jaso zituen, eta deprimitu egin zen.

Cantorren bizitza tristeak altxor bat ekarri zion matematikari. Gaur egun, zenbaki transfinituen aritmetika oinarritzkoa da infinituaren tratamenduan. Horrek egin zuen handia Cantor: beldur matematikoa aurrez aurre begiratu zion, hain auzartak ez zirenen onurarako. ●

